PRODUIT SCALAIRE – Chapitre 2/2

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/dII7myZuLvo**](https://youtu.be/dII7myZuLvo)

**Partie 1 : Produit scalaire et orthogonalité**

 1) Projeté orthogonal

Propriété : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$.

Démonstration :

Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.

Supposons le contraire.

$$\vec{u}.\vec{v}=0$$

$$⟺\left‖\vec{u}\right‖×\left‖\vec{v}\right‖×cos\left(\vec{u} ; \vec{v}\right)=0$$

$$⟺cos\left(\vec{u} ; \vec{v}\right)=0$$

$⟺$ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

Définition : Soit une droite *d* et un point M.

Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.



Propriété : Soit $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ deux vecteurs non nuls.

$H$ est le projeté orthogonal du point $B$ sur la

droite ($OA$).

On a : $\vec{OA}.\vec{OB}=\vec{OA}.\vec{OH}$

Démonstration :

$\vec{OA}.\vec{OB}=\vec{OA}.\left(\vec{OH}+\vec{HB}\right)$, d’après la relation de Chasles.

$$ =\vec{OA}.\vec{OH}+\vec{OA}.\vec{HB}=\vec{OA}.\vec{OH}$$

En effet, les vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{HB}$ sont orthogonaux donc $\vec{OA}.\vec{HB}=0$.

Méthode : Calculer un produit scalaire par projection

 **Vidéo** [**https://youtu.be/2eTsaa2vVnI**](https://youtu.be/2eTsaa2vVnI)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/K4Izn5xB\_Qk**](https://youtu.be/K4Izn5xB_Qk)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/-Hr28g0PFu0**](https://youtu.be/-Hr28g0PFu0)

Soit un carré $ABCD$ de côté 4.

Calculer les produits scalaires :

a) $\vec{AB}.\vec{AC}$ b) $\vec{AB}.\vec{AD}$ c) $\vec{AD}.\vec{CB}$

**Correction**

a) $B$ est le projeté orthogonal de $C$ sur ($AB$), alors :

$$\vec{AB}.\vec{AC}=\vec{AB}.\vec{AB}=\left‖\vec{AB}\right‖^{2}=AB^{2}=4^{2}=16$$

b) $\vec{AB}.\vec{AD}=0$ car les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ sont orthogonaux.

c) Comme $\vec{CB}=\vec{DA}$, on a :

$\vec{AD}.\vec{CB}=\vec{AD}.\vec{DA}=-\vec{AD}.\vec{AD}=-\left‖\vec{AD}\right‖^{2}=-AD^{2}=-4^{2}=-16$

 2) Transformation de l’expression $\vec{MA}.\vec{MB}$

Propriété : L’ensemble des points $M$ vérifiant l’égalité $\vec{MA}.\vec{MB}=0$ est le cercle de diamètre [$AB$].

Démonstration au programme :

 **Vidéo** **https://youtu.be/D3n8aYsSQLA**

Soit $O$ le milieu du segment [$AB$].

On a :

$$\vec{MA}.\vec{MB}=0$$

$⟺\left(\vec{MO}+\vec{OA}\right).\left(\vec{MO}+\vec{OB}\right)=0$

Comme $O$ est le milieu de [$AB$], on a : $\vec{OB}=-\vec{OA}$

Soit :

$$\left(\vec{MO}+\vec{OA}\right).\left(\vec{MO}-\vec{OA}\right)=0$$

$⟺\vec{MO}^{2}-\vec{OA}^{2}=0 $ car $\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^{2}-\vec{v}^{2}$

$$⟺MO^{2}-OA^{2}=0$$

Soit : $MO^{2}=OA^{2}$ soit encore $MO=OA$.

$M$ appartient donc au cercle de centre $O$ et de rayon $OA$, c’est-à-dire le cercle de diamètre [$AB$].

Comme $\vec{MA}.\vec{MB}=0$, les vecteurs $\vec{MA}$ et $\vec{MB}$ sont orthogonaux.

L’ensemble des points $M$ tel que le triangle $ABM$ soit rectangle en $M$ est donc le cercle de diamètre [$AB$].

Méthode : Appliquer l’égalité $\vec{MA}.\vec{MB}=0$

 **Vidéo** [**https://youtu.be/bUARS-dthLM**](https://youtu.be/bUARS-dthLM)

On donne deux points $A$ et B$.$

Représenter l’ensemble des points $P$, tel que : $PB^{2}=\vec{AB}.\vec{PB}$

**Correction**

$$PB^{2}=\vec{AB}.\vec{PB}$$

$$PB^{2}-\vec{AB}.\vec{PB}=0$$

$$\vec{PB}.\vec{PB}-\vec{AB}.\vec{PB}=0$$

$$\vec{PB}.\left(\vec{PB}-\vec{AB}\right)=0$$

$\vec{PB}.\left(\vec{PB}+\vec{BA}\right)=0$

$\vec{PB}.\vec{PA}=0$, d’après la relation de Chasles.

L’ensemble des points $P$ est donc le cercle de diamètre [$AB$].

**Partie 2 : Produit scalaire dans un repère orthonormé**

Dans cette partie, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O ;\vec{i} ,\vec{j}\right)$.

Propriété : Soit $\vec{u}\left(\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right)$ et $\vec{v}\left(\begin{array}{c}x'\\y'\end{array}\right)$ deux vecteurs. On a : $\vec{u}.\vec{v}=xx^{'}+yy'$.

Méthode : Calculer un produit scalaire à l’aide des coordonnées (1)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/aOLRbG0IibY**](https://youtu.be/aOLRbG0IibY)

Soit $\vec{u}\left(\begin{array}{c}5\\-4\end{array}\right)$ et $\vec{v}\left(\begin{array}{c}-3\\7\end{array}\right)$ deux vecteurs. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$

**Correction**

$$\vec{u}.\vec{v}=5×\left(-3\right)+\left(-4\right)×7=-15-28=-43$$

Méthode : Calculer un produit scalaire à l’aide des coordonnées (2)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/cTtV4DsoMLQ**](https://youtu.be/cTtV4DsoMLQ)

On considère quatre points $A\left(\begin{array}{c}2\\1\end{array}\right)$, $B\left(\begin{array}{c}5\\3\end{array}\right)$, $C\left(\begin{array}{c}1\\4\end{array}\right)$ et $D\left(\begin{array}{c}5\\-2\end{array}\right)$.

Démontrer que les droites ($AB$) et ($CD$) sont perpendiculaires.

**Correction**

- Calculons les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$.

$\vec{AB}\left(\begin{array}{c}5-2\\3-1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}3\\2\end{array}\right)$ et $\vec{CD}\left(\begin{array}{c}5-1\\-2-4\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}4\\-6\end{array}\right)$

- Calculons le produit scalaire des deux vecteurs :

$$\vec{AB}.\vec{CD}=3×4+2×\left(-6\right)=12-12=0$$

- Le produit scalaire est nul donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont orthogonaux.

Et donc, les droites ($AB$) et ($CD$) sont perpendiculaires.

Méthode : Appliquer plusieurs formules du produit scalaire



 **Vidéo** [**https://youtu.be/Ok6dZG8WIL8**](https://youtu.be/Ok6dZG8WIL8)

Calculer la mesure de l'angle $\hat{BOD}$ en calculant le produit scalaire $\vec{AB}.\vec{CD}$ de deux façons.

On pourra lire les coordonnées des points $A$, $B$, $C$ et $D$ dans le repère ci-contre.

**Correction**

● En calculant le produit scalaire $\vec{AB}.\vec{CD}$ avec la formule du cosinus, on a :

$$\vec{AB}.\vec{CD}=AB×CD×\cos(\left(\hat{BOD}\right))$$

Or : $AB=\sqrt{5^{2}+1^{2}}=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$

$$ CD=\sqrt{2^{2}+4^{2}}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$$

Donc : $\vec{AB}.\vec{CD}=\sqrt{26}×\sqrt{20}×\cos(\left(\hat{BOD}\right))$

$$ =\sqrt{520}×\cos(\left(\hat{BOD}\right))$$

● En calculant le produit scalaire $\vec{AB}.\vec{CD}$ avec la formule des coordonnées, on a :

$\vec{AB}\left(\begin{array}{c}5\\ -1\end{array}\right)$ et $\vec{CD}\left(\begin{array}{c}-2\\-4\end{array}\right)$, donc :

$$\vec{AB}.\vec{CD}= 5×\left(-2\right)+\left(-1\right)×\left(–4\right)=-6$$

● On a ainsi : $\sqrt{520}×\cos(\left(\hat{BOD}\right))=-6$

 $\cos(\left(\hat{BOD}\right))=-$ $\frac{6}{\sqrt{520}}$ $=-$ $\frac{6}{2\sqrt{130}}=-$ $\frac{3}{\sqrt{130}}$

Et donc : $\hat{BOD}≈105,3°$.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)