PRODUIT SCALAIRE – Chapitre 1/2

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/dIl7myZuLvo

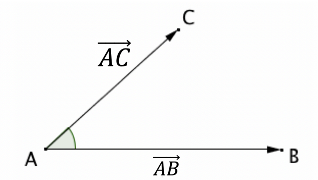
La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877), ci-contre.
Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.

Partie 1 : Définitions et propriétés

1) Définitions

Définition : Soit deux points A et B.
La **norme du vecteur** $\overrightarrow{AB}$, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est la distance AB.

Définition : Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs.
On appelle **produit scalaire** de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$, noté $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, le nombre réel défini par :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos\left(\widehat{BAC}\right)$.



Propriété :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$

Remarques :
- $\vec{u}.\vec{v}$ se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ».
- Si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$,

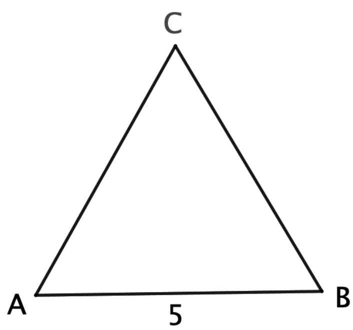
Exemple :
On donne : $AB = 2$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$.
Alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$.

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide de la formule du cosinus

Vidéo https://youtu.be/dfxz40fK0UI

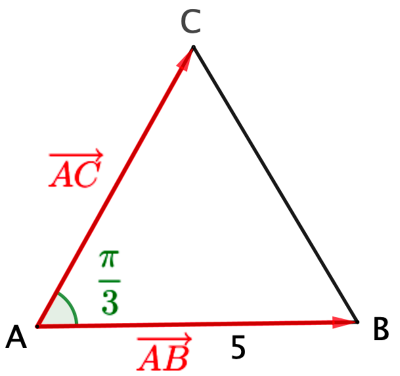
a) Soit un triangle équilatéral ABC de côté 5.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) Soit I le milieu de $[AB]$.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}$.



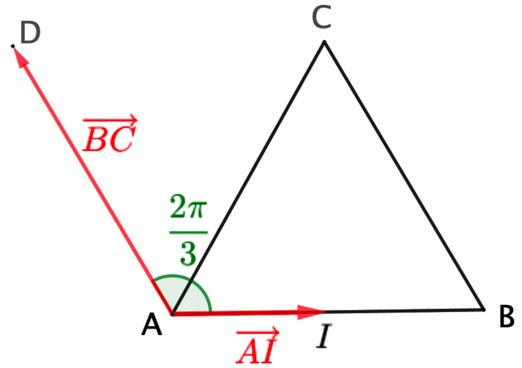
Correction

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
$= 5 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
$= 25 \times 0,5$
$= 12,5$



b) Le produit scalaire $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}$ est composé de deux vecteurs qui n'ont pas la même origine.
On construit alors le point D tel que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
De cette façon, le produit scalaire à calculer est composé de deux vecteurs de même origine le point A (voir figure ci-contre).

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AD}$
$= AI \times AD \times \cos(\widehat{IAD})$
$= 2,5 \times 5 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
$= 12,5 \times (-0,5)$
$= -6,25$



Attention : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Écrire par exemple $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !

2) Propriétés

Propriété de symétrie : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$

Propriétés de bilinéarité :
1) $\vec{u}\,.\,(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$ 2) $\vec{u}\,.\,(k\vec{v}) = k\vec{u}\,.\,\vec{v}$, avec k un nombre réel.

Identités remarquables :
1) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^2$ $\longrightarrow$ On peut également noter : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
2) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^2$
3) $(\vec{u} + \vec{v})\,.\,(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Méthode : Appliquer les propriétés du produit scalaire

Vidéo https://youtu.be/_SDj-fG1S18
Vidéo https://youtu.be/P0nKS-cTEO0

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de normes respectives 2 et 3 et tels que : $\vec{u}.\vec{v} = 1$.
Calculer : a) $(\vec{u} + \vec{v})\,.\,(\vec{u} - \vec{v})$ b) $\vec{u}\,.\,(\vec{u} + \vec{v})$ c) $-2\vec{v}.\,(3\vec{u} - \vec{v})$

Correction

a) $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$
$= \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
$= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
$= 2^2 - 3^2$
$= -5$

$b)$ $\vec{u}.(\vec{u}+\vec{v})$
$= \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v}$
$= \|\vec{u}\|^2 + \vec{u}.\vec{v}$
$= 2^2 + 1$
$= 5$

c) $-2\vec{v}.(3\vec{u}-\vec{v})$
$= -6\vec{v}.\vec{u} + 2\vec{v}.\vec{v}$
$= -6\vec{v}.\vec{u} + 2\|\vec{v}\|^2$
$= -6\vec{u}.\vec{v} + 2\|\vec{v}\|^2$
$= -6 \times 1 + 2 \times 3^2$
$= 12$

Partie 2 : Produit scalaire et norme

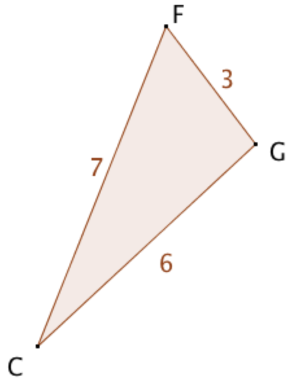
Propriété : Soit A, B et C trois points. On a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide des normes

Vidéo https://youtu.be/iNsm05JimgA

On considère la figure ci-contre, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}$.



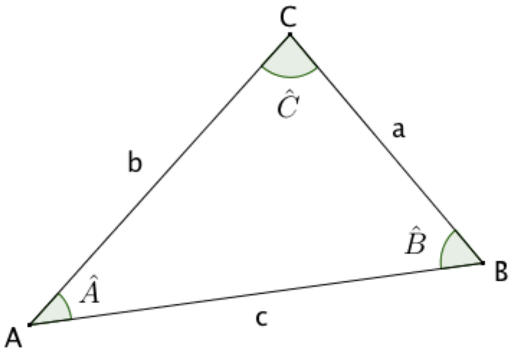
Correction

$\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(CG^2 + CF^2 - GF^2)$
$= \frac{1}{2}(6^2 + 7^2 - 3^2)$
$= \frac{1}{2}(36 + 49 - 9)$
$= \frac{1}{2} \times 76$
$= 38$

A Samarkand, le savant perse *Jemshid ibn Massoud Al Kashi (1380 ; 1430)* vit sous la protection du prince *Ulugh-Beg* (1394 ; 1449) qui a fondé une Université comprenant une soixantaine de scientifiques qui étudient la théologie et les sciences.
Dans son Traité sur le cercle (1424), *Al Kashi* calcule le rapport de la circonférence à son rayon pour obtenir une valeur approchée de 2π avec une précision jamais atteinte. Il obtient 9 positions exactes en base 60 soit 16 décimales exactes :
$2\pi \approx 6{,}283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5$

Théorème d'Al Kashi : Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$$



Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/34OJiQ_4-N4

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\hat{A}) = bc\cos(\hat{A})$

et

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$

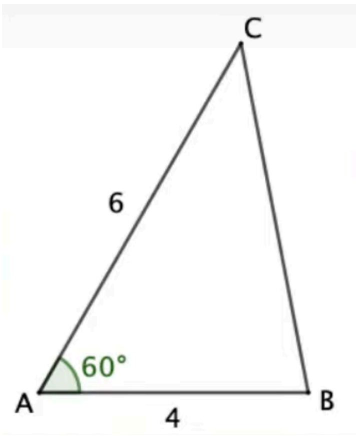
Donc : $\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = bc\cos(\hat{A})$

Soit : $b^2 + c^2 - a^2 = 2\,bc\cos(\widehat{A})$

Soit encore : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$

Méthode : Appliquer le théorème d'Al Kashi pour calculer une longueur

Vidéo https://youtu.be/SeFjmbOGhVc



On considère la figure ci-contre.
Calculer la longueur BC. On donnera une valeur arrondie au dixième.

Correction

D'après le théorème d'Al Kashi, on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$BC^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \times \cos(60°)$

$BC^2 = 16 + 36 - 48 \times \frac{1}{2}$

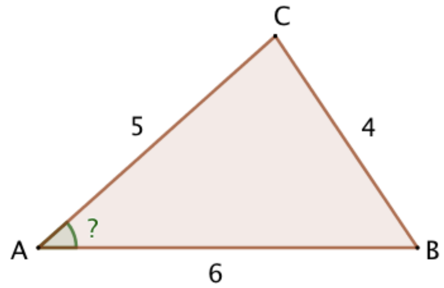
$BC^2 = 28$

$BC = \sqrt{28} \approx 5{,}3$

Méthode : Appliquer le théorème d'Al Kashi pour calculer un angle

Vidéo https://youtu.be/-cQQAjHJ0Kc

On considère la figure ci-contre. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.



Correction

D'après le théorème d'Al Kashi, on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
$4^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \cos(\widehat{BAC})$
$16 = 36 + 25 - 60\cos(\widehat{BAC})$
$60\cos(\widehat{BAC}) = 36 + 25 - 16$

$60\cos(\widehat{BAC}) = 45$
$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{45}{60}$
$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{3}{4}$
$\widehat{BAC} \approx 41°$

Même les Playmobil connaissent le théorème d'al Kashi !