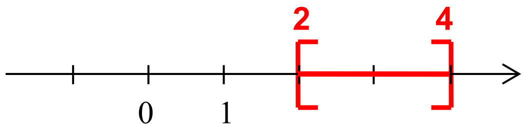
NOMBRES RÉELS – Chapitre 2/2

Tout le cours sur les intervalles en vidéo : https://youtu.be/mvJy4LVCmRI
Tout le cours sur les valeurs absolues en vidéo : https://youtu.be/5-rUuceEgAE

Partie 1 : Intervalles de $\mathbb{R}$

1. Notations

L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $2 \leq x \leq 4$ peut se représenter sur une droite graduée.



Cet ensemble est appelé un intervalle et se note : $[2\,;4]$

Exemple :
L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $-2 \leq x \leq 7$ se note : $[-2\,;\,7]$.
On a par exemple :
$4 \in [-2\,;\,7]$
$-1 \in [-2\,;\,7]$
$8 \notin [-2\,;\,7]$

2. Intervalle ouvert et intervalle fermé

Définitions :
On dit qu'un intervalle est **fermé** si ses extrémités appartiennent à l'intervalle.
On dit qu'il est **ouvert** dans le cas contraire.

Exemples :

- L'intervalle $[-2\,;\,5]$ est un intervalle fermé.

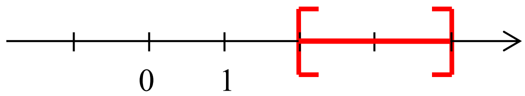
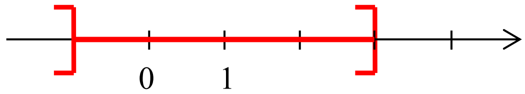
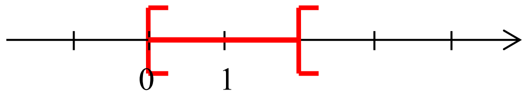
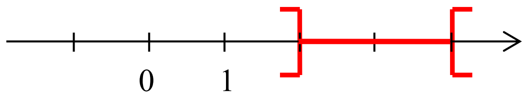
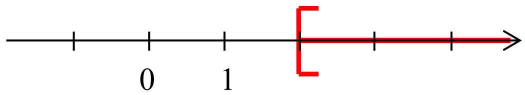
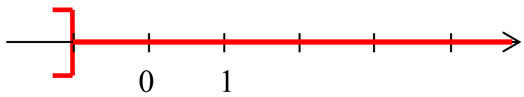
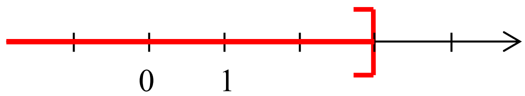
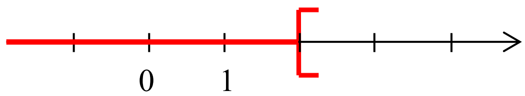
On a : $-2 \in [-2\,;\,5]$ et $5 \in [-2\,;\,5]$

- L'intervalle $]2\,;\,6[$ est un intervalle ouvert.

On a : $2 \notin]2\,;\,6[$ et $6 \notin]2\,;\,6[$

- L'intervalle $]6\,;\,+\infty[$ est également un intervalle ouvert.

Vidéo https://youtu.be/9MtAK7Xzrls

Nombres réels x	Notation	Représentation
$2 \leq x \leq 4$	$[2\ ;\ 4]$	
$-1 < x \leq 3$	$]-1\ ;\ 3]$	
$0 \leq x < 2$	$[0\ ;\ 2[$	
$2 < x < 4$	$]2\ ;\ 4[$	
$x \geq 2$	$[2\ ;\ +\infty[$ ∞ désigne l'infini	
$x > -1$	$]-1\ ;\ +\infty[$	
$x \leq 3$	$]-\infty\ ;\ 3]$	
$x < 2$	$]-\infty\ ;\ 2[$	

<u>Remarque :</u>
L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est un intervalle qui peut se noter $]-\infty\ ;\ +\infty[$.

<u>Méthode :</u> Déterminer si un nombre appartient à un intervalle

Vidéo https://youtu.be/Il_nVCMHIu8

Déterminer si chacun des nombres suivants appartient à l'intervalle $I = \left]\frac{3}{4}\ ;5\right]$.

$$1\ ;\frac{3}{4}\ ;\frac{5}{8}\ ;\ \sqrt{10}$$

Correction

- $1 \in I$, car $\frac{3}{4} < 1 \leq 5$.
- $\frac{3}{4} \notin I$, car I est un intervalle ouvert à gauche et donc son extrémité gauche, $\frac{3}{4}$, ne lui appartient pas.
- $\frac{5}{8} \notin I$, car $\frac{5}{8} = 0{,}625 < \frac{3}{4}$.
- $\sqrt{10} \in I$.

En effet : $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$, soit : $3 < \sqrt{10} < 4$
Et $]3\,;4[\subset I$.

3. Application aux inéquations

Une inéquation est une inégalité qui contient une inconnue x.
Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient cette inégalité.
Il s'agit d'un ensemble de valeurs. Pour définir l'ensemble des solutions, on utilise les intervalles.
Les techniques de résolution des inéquations sont semblables à celles utilisées pour les équations.

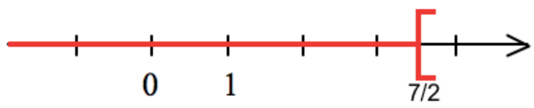
Méthode : Donner les solutions d'une inéquation

Vidéo https://youtu.be/p93oVqzvog8

Résoudre l'inéquation et donner les solutions sous forme d'un intervalle : $2x - 3 < 4$

Correction

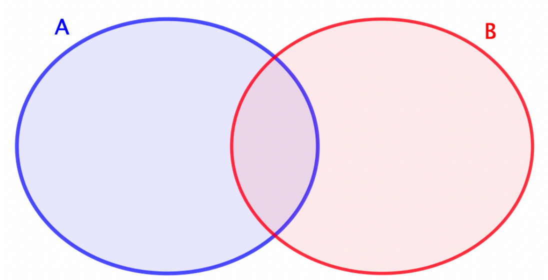
$$2x - 3 < 4$$
$$2x < 4 + 3$$
$$2x < 7$$
$$x < \frac{7}{2}$$



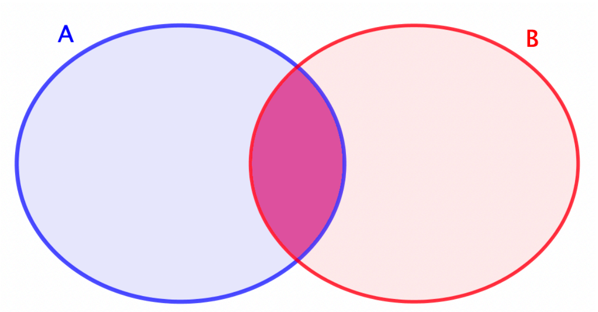
L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\infty\,; \frac{7}{2}\right[$.

4. Intersections et réunions d'intervalles :

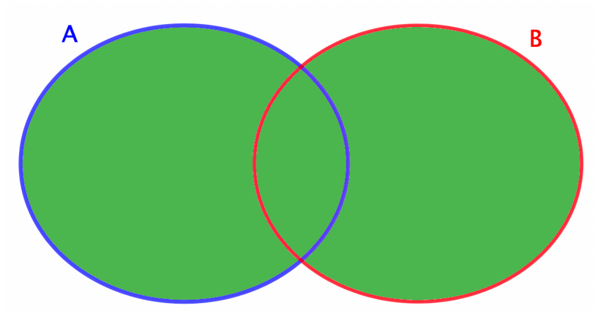
Définitions :
- L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B et se note A∩B.
- La **réunion** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B et se note A∪B.



$A \cap B$



$A \cup B$



Exemple :
Soit les ensembles $A = \{1\,;2\}$ et $B = \{1\,;3\,;4\}$.
Alors $A \cap B = \{1\}$ et $A \cup B = \{1\,;2\,;3\,;4\}$

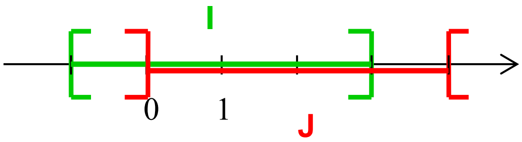
Méthode : Déterminer l'intersection et la réunion d'intervalles

Vidéo https://youtu.be/8WJG_QHQs1Y
Vidéo https://youtu.be/hzINDVy0dgg

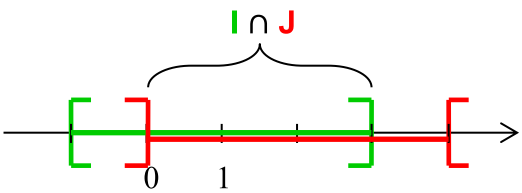
Dans les cas suivants, déterminer l'intersection et la réunion des intervalles I et J :
a) I = $[-1\,;\ 3]$ et J = $]0\,;\ 4[$ b) I = $]-\infty\,;\ -1]$ et J = $[1\,;\ 4]$

Correction

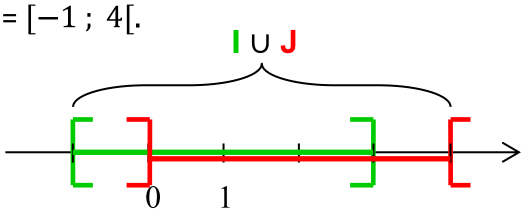
a) - On représente les intervalles **I** et **J** sur un même axe gradué.



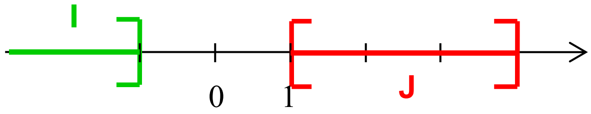
Les nombres de l'intersection des deux ensembles sont les nombres qui appartiennent à la fois aux deux ensembles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué où les deux ensembles se superposent.
Ainsi I ∩ J = $]0\,;\ 3]$.



- Les nombres de la réunion des deux ensembles sont les nombres qui appartiennent au moins à l'un des deux ensembles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué marquée soit par l'intervalle I soit par l'intervalle J. Ainsi I ∪ J = $[-1\,;\ 4[$.



b)



- Ici, les ensembles I et J n'ont pas de zone en commun. L'intersection des deux intervalles est vide.
Un ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'**ensemble vide** et se note ∅.
On a alors : I ∩ J = ∅

- I ∪ J = $]-\infty\,;\ -1]$ ∪ $[1\,;\ 4]$

Partie 2 : Valeur absolue d'un réel

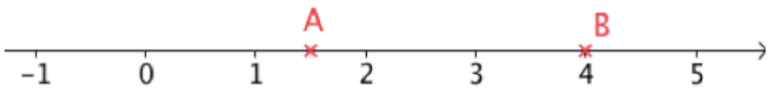
Vidéo https://youtu.be/m3htEMfDxcE
Vidéo https://youtu.be/ejxGmpzrciA

Exemples :
- La valeur absolue de – 5 est égale à 5 et on note $|-5| = 5$.
- La valeur absolue de 5 est égale à 5 et on note $|5| = 5$.
- $|11 - 13| = 2$
- $|13 - 11| = 2$

Remarque : La valeur absolue d'un nombre, c'est le nombre sans son signe.

Propriété : Soit A et B deux points d'abscisses respectives a et b sur une droite graduée.
La distance entre les points A et B est le nombre $|a - b|$.

Exemple :
La distance entre les nombres 1,5 et 4 est :
$|1{,}5 - 4| = |-2{,}5| = 2{,}5$



Méthode : Résoudre une équation avec des valeurs absolues

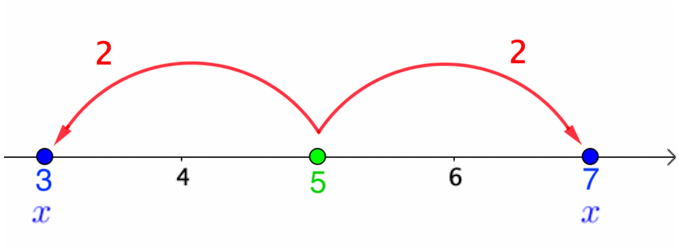
Vidéo https://youtu.be/FPj7S1PkNGY

Résoudre l'équation suivante en s'aidant d'une droite graduée : $|x - 5| = 2$

Correction

$$\underbrace{|x-5|}_{\text{Distance entre } x \text{ et } 5} = 2$$

La distance entre x et 5 est donc égale à 2.



On en déduit que : $x = 3$ ou $x = 7$.

Méthode : Résoudre une inéquation avec des valeurs absolues

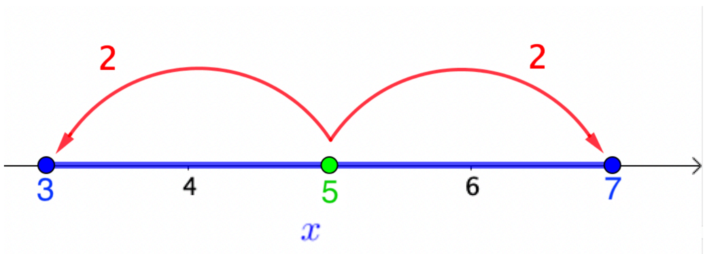
Vidéo https://youtu.be/kTJ09D1Bzs0

Résoudre l'inéquation suivante en s'aidant d'une droite graduée : $|x-5| \leq 2$

Correction

$$\underbrace{|x-5|}_{\text{Distance entre } x \text{ et } 5} \leq 2$$

La distance entre x et 5 est donc inférieure ou égale à 2.



On en déduit que : $x \in [3\,;7]$.