NOMBRES RÉELS – Chapitre 1/2

Tout le cours sur les ensembles de nombres en vidéo : https://youtu.be/kL-eMNZiARM

Partie 1 : Nombres entiers

Vidéo https://youtu.be/HMY31orMLjs

1. Nombres entiers naturels

Définition : Un **nombre entier naturel** est un nombre entier qui est positif.
L'ensemble des **nombres entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$.
$\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ...\}$.

Exemples :
$4 \in \mathbb{N}$ (4 appartient à l'ensemble des entiers naturels)
$-2 \notin \mathbb{N}$ (-2 n'appartient pas à l'ensemble des entiers naturels)

2. Nombres entiers relatifs

Définition : Un **nombre entier relatif** est un nombre entier qui est positif ou négatif.
L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est noté $\mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z} = \{... ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...\}$.

Exemples : $-2 \in \mathbb{Z}$ $\quad 5 \in \mathbb{Z}$ $\quad 0{,}33 \notin \mathbb{Z}$

Partie 2 : Nombres décimaux, nombres rationnels

1. Nombres décimaux

Définition : Un **nombre décimal** est un nombre qui s'écrit avec un nombre fini de chiffres après la virgule.
L'ensemble des **nombres décimaux** est noté $\mathbb{D}$.

Exemples :
$0{,}56 \in \mathbb{D}$ $\quad 3 \in \mathbb{D}$
$\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ car $\frac{1}{3} \approx 0{,}3333...$ $\quad \frac{3}{4} \in \mathbb{D}$ car $\frac{3}{4} = 0{,}75$

Remarque :
Un nombre décimal peut toujours s'écrire sous la forme de la fraction d'un entier et d'une puissance de 10.
Par exemple : $2{,}36 = \frac{236}{100} = \frac{236}{10^2}$

2. Nombres rationnels

Définition : Un **nombre rationnel** est une fraction (*).
L'ensemble des **nombres rationnels** est noté $\mathbb{Q}$.

(*) Une fraction s'écrit sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec a un entier et b un entier non nul.

Exemples : $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ $\quad 4 \in \mathbb{Q}$ $\quad -4{,}8 \in \mathbb{Q}$ $\quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/SHRo1ISyIXI

Démontrons que le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

On va effectuer une démonstration par l'absurde en supposant que $\frac{1}{3}$ est décimal.
Si notre démonstration aboutit à une absurdité, cela prouvera que notre hypothèse de départ est fausse.

Supposons donc que $\frac{1}{3}$ est décimal.
Alors il peut s'écrire sous la forme de la fraction d'un entier et d'une puissance de 10.
Soit $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^p}$ avec a entier et p entier naturel.
Donc $10^p = 3a$ et donc 10^p est divisible par 3.
Un nombre est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Or, ceci est impossible car la somme des chiffres de 10^p est 1, et 1 n'est pas divisible par 3.
Donc l'hypothèse posée au départ est fausse et donc $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal

Partie 3 : Notion de nombres réels

1. Nombres irrationnels

Définition : Un **nombre irrationnel** est un nombre qui ne peut pas s'écrire à l'aide d'une fraction.

Exemples :
$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ou encore π sont des nombres irrationnels.
Ils ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une fraction.

Remarque :
Il n'est pas possible d'écrire un nombre irrationnel sous forme décimale. Les décimales qui le constituent sont en nombre infini et se suivent sans suite logique.

2. Nombres réels

Définition : Un nombre réel est un nombre rationnel ou irrationnel.
L'ensemble des **nombres réels** est noté $\mathbb{R}$.

Exemples :
$2, -5, 0.67, \frac{1}{3}, \sqrt{3}$ ou π appartiennent à $\mathbb{R}$.

Remarques :
- Un nombre est réel s'il est l'abscisse d'un point d'une droite graduée appelée la **droite numérique**.
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble de tous les nombres que nous utilisons en classe de seconde.

Démonstration au programme : Irrationalité de $\sqrt{2}$

Vidéo https://youtu.be/oRcTlNh1Sjc
On va effectuer une démonstration par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel.
Si notre démonstration aboutit à une absurdité, cela prouvera que notre hypothèse de départ est fausse.

Supposons donc que $\sqrt{2}$ est un rationnel.
Il s'écrit alors $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels premiers entre eux, b non nul.
Ainsi : $\frac{a^2}{b^2} = 2$ soit $a^2 = 2b^2$.
On en déduit que a^2 est pair, ce qui entraîne que a est pair.
En effet, si a était impair, alors a^2 serait impair (voir Chapitre « Notion de multiple, diviseur et nombre premier »).
Puisque a est pair, il existe un entier naturel k tel que $a = 2k$.
Comme, $a^2 = 2b^2$

On a : $(2k)^2 = 2b^2$

Soit : $4k^2 = 2b^2$

Soit encore $b^2 = 2k^2$.

On en déduit que b^2 est pair, ce qui entraîne que b est pair.
Or, a et b sont premiers entre eux, donc ils ne peuvent être pairs simultanément. On aboutit à une absurdité.
Donc, $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. Et donc, $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

« Les nombres entiers permettent de compter, les nombres réels permettent de mesurer. »

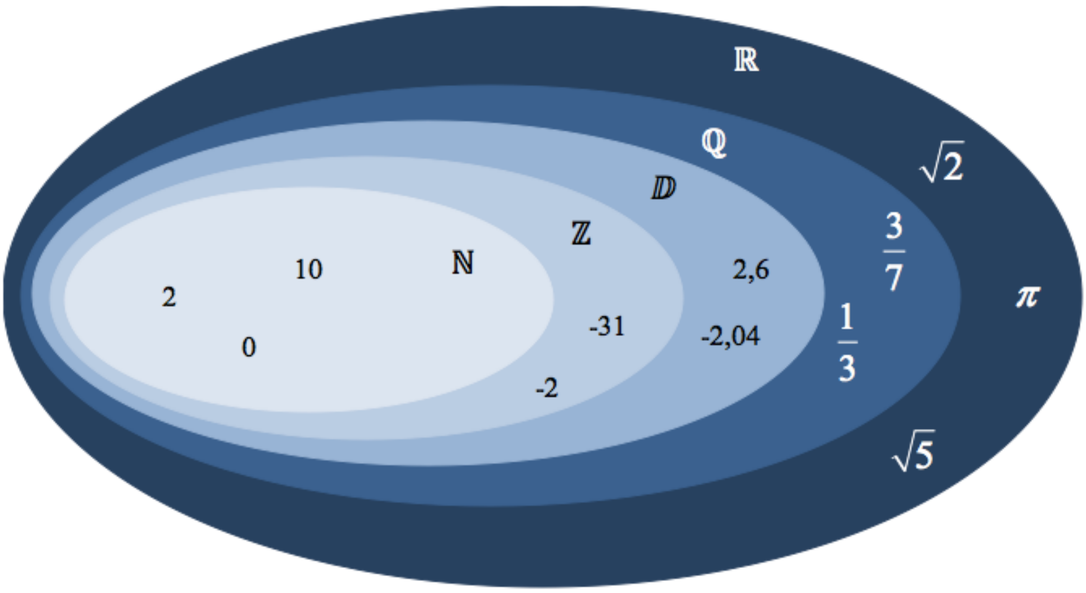
Partie 4 : Classification des nombres

La classification des nombres :

Vidéo https://youtu.be/kL-eMNZiARM

Si un nombre appartient à $\mathbb{N}$, alors il appartient à $\mathbb{Z}$.
Par exemple : $5 \in \mathbb{N}$ donc $5 \in \mathbb{Z}$.
On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$. On note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

On a également les inclusions suivantes :
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



Méthode : Reconnaître la nature d'un nombre

Vidéo https://youtu.be/pKxTaiqnyHg

Quel est le plus petit ensemble de nombres auquel appartient chacun des nombres suivants ?

1) $-\frac{1}{4}$ 2) $\frac{2}{6}$ 3) $1,333$ 4) $\sqrt{36}$ 5) $\sqrt{6}$ 6) $\frac{-3(\sqrt{2})^2}{12}$

Correction

1) $-\frac{1}{4} = -0,25$

Donc $-\frac{1}{4} \in \mathbb{D}$ car le nombre de décimales après la virgule est en nombre fini.

2) $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,3333\ldots$

Donc $\frac{2}{6} \in \mathbb{Q}$ car $\frac{2}{6}$ s'écrit uniquement sous forme d'une fraction et ne peut pas s'écrire sous forme décimale.

3) $1,333 \in \mathbb{D}$ car le nombre de décimales après la virgule est en nombre fini.

4) $\sqrt{36} = 6$

Donc $\sqrt{36} \in \mathbb{N}$ car 6 est un nombre entier positif.

5) $\sqrt{6} \approx 2,4495\ldots$

Donc $\sqrt{6} \in \mathbb{R}$ car c'est un nombre irrationnel.

6) $\frac{-3\left(\sqrt{2}\right)^2}{12} = \frac{-3 \times 2}{12} = \frac{-6}{12} = -0,5$

Donc $\frac{-3\left(\sqrt{2}\right)^2}{12} \in \mathbb{D}$ car le nombre de décimales après la virgule est en nombre fini.

Déterminer un arrondi d'un nombre :

Vidéo https://youtu.be/53VOST9yJfg

Méthode : Donner un encadrement d'un nombre réel

Vidéo https://youtu.be/sJIXJT3fdcU

A l'aide de la calculatrice donner un encadrement à 10^{-3} de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$.

Correction

La calculatrice affiche des valeurs approchées :

Donner un encadrement à 10^{-3}, c'est donner un encadrement d'amplitude 0,001.

On a alors les encadrements à 10^{-3} : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ et $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$.