NOMBRES RÉELS – Chapitre 1/2

 **Tout le cours sur les ensembles de nombres en vidéo :** [**https://youtu.be/kL-eMNZiARM**](https://youtu.be/kL-eMNZiARM)

###### **Partie 1 : Nombres entiers**

 **Vidéo** [**https://youtu.be/HMY31orMLjs**](https://youtu.be/HMY31orMLjs)

1. Nombres entiers naturels

Définition : Un **nombre entier naturel** est un nombre entier qui est positif.

L'ensemble des **nombres entiers naturels** est noté ℕ**.**

ℕ= $\left\{0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;…\right\}$.

Exemples :

$4$ $\in $ ℕ ($4$ appartient à l’ensemble des entiers naturels)

$-2$ $\notin $ℕ ($-2$ n’appartient pas à l’ensemble des entiers naturels)

1. Nombres entiers relatifs

Définition : Un **nombre entier relatif** est un nombre entier qui est positif ou négatif.

L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est noté ℤ**.**

ℤ =$\left\{…;-3 ; -2 ; -1 ; 0 ;1 ;2 ;3 ;…\right\}$.

Exemples : $-2$ $\in $ℤ $5\in $ℤ $0,33$ $\notin $ℤ

###### **Partie 2 : Nombres décimaux, nombres rationnels**

1. Nombres décimaux

Définition : Un **nombre décimal** est un nombre qui s’écrit avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

L'ensemble des **nombres décimaux** est noté ⅅ**.**

Exemples : $0,56$ $\in $ⅅ $3$ $\in $ⅅ

$\frac{1}{3}\notin $ⅅ car $\frac{1}{3}$ $≈$ $0,3333…$ $\frac{3}{4}$ $\in $ⅅ car $\frac{3}{4}$ $= 0,75$

Remarque :

Un nombre décimal peut toujours s’écrire sous la forme de la fraction d’un entier et d’une puissance de 10.

Par exemple $: 2,36$ = $\frac{236}{100}$ = $\frac{236}{10^{2}}$

1. Nombres rationnels

Définition : Un **nombre rationnel** est une fraction (\*).

L'ensemble des **nombres rationnels** est notéℚ**.**

(\*) Une fraction s’écrit sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec *a* un entier et *b* un entier non nul.

Exemples : $\frac{1}{3}$ $\in $ℚ $4$ $\in $ℚ $-4,8$ $\in $ℚ $\sqrt{2}$$\notin $ℚ

**Démonstration au programme :**

 **Vidéo** [**https://youtu.be/SHRo1ISyIXI**](https://youtu.be/SHRo1ISyIXI)

Démontrons que le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n’est pas décimal.

On va effectuer une démonstration par l’absurde en supposant que $\frac{1}{3}$ est décimal.

Si notre démonstration aboutit à une absurdité, cela prouvera que notre hypothèse de départ est fausse.

Supposons donc que $\frac{1}{3}$ est décimal.

Alors il peut s’écrire sous la forme de la fraction d’un entier et d’une puissance de 10.

Soit $\frac{1}{3}$ = $\frac{a}{10^{p}}$ avec $a$ entier et $p$ entier naturel.

Donc $10^{p}=3a$ et donc $10^{p}$ est divisible par 3.

Un nombre est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Or, ceci est impossible car la somme des chiffres de $10^{p}$ est 1, et 1 n’est pas divisible par 3.

Donc l’hypothèse posée au départ est fausse et donc $\frac{1}{3}$ n’est pas décimal

###### **Partie 3 : Notion de nombres réels**

1. Nombres irrationnels

Définition : Un **nombre irrationnel** est un nombre qui ne peut pas s’écrire à l’aide d’une fraction.

Exemples :

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ou encore $π$ sont des nombres irrationnels.

Ils ne peuvent pas s’écrire sous la forme d’une fraction.

Remarque :

Il n’est pas possible d’écrire un nombre irrationnel sous forme décimale. Les décimales qui le constituent sont en nombre infini et se suivent sans suite logique.

1. Nombres réels

Définition : Un nombre réel est un nombre rationnel ou irrationnel.

L'ensemble des **nombres réels** est notéℝ**.**

Exemples :

$2$, $-5$, $0.67$, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{3}$ ou $π$ appartiennent àℝ.

Remarques :

* Un nombre est réel s’il est l’abscisse d’un point d’une droite graduée appelée la **droite numérique**.
* ℝ est l'ensemble de tous les nombres que nous utilisons en classe de seconde.

**Démonstration au programme :** Irrationalité de $\sqrt{2}$

 **Vidéo** [**https://youtu.be/oRcTlNh1Sjc**](https://youtu.be/oRcTlNh1Sjc)

On va effectuer une démonstration par l’absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel.

Si notre démonstration aboutit à une absurdité, cela prouvera que notre hypothèse de départ est fausse.

Supposons donc que $\sqrt{2}$ est un rationnel.

Il s’écrit alors $\sqrt{2}$ = $\frac{a}{b}$ avec $a$ et $b$entiers naturels premiers entre eux, $b$ non nul.

Ainsi : $\frac{a^{2}}{b^{2}}$ = 2 soit $a^{2}=2b^{2}$.

On en déduit que $a^{2} $est pair, ce qui entraîne que $a$ est pair.

En effet, si $a$ était impair, alors $a^{2}$ serait impair (voir Chapitre « Notion de multiple, diviseur et nombre premier »).

Puisque $a$ est pair, il existe un entier naturel $k$ tel que $a=2k$.

Comme, $a^{2}=2b^{2}$

On a : $\left(2k\right)^{2}=2b^{2}$

Soit : $4k^{2}=2b^{2}$

Soit encore $b^{2}=2k^{2}$.

On en déduit que $b^{2}$ est pair, ce qui entraîne que $b$ est pair.

Or, $a$ et $b$sont premiers entre eux, donc ils ne peuvent être pairs simultanément. On aboutit à une absurdité.

Donc, $\sqrt{2}$ n’est pas un rationnel. Et donc, $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

*« Les nombres entiers permettent de compter, les nombres réels permettent de mesurer. »*

###### **Partie 4 : Classification des nombres**



La classification des nombres :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/kL-eMNZiARM**](https://youtu.be/kL-eMNZiARM)

Si un nombre appartient à ℕ, alors il appartient à ℤ.

Par exemple : $5\in $ ℕ donc $5$ $\in $ ℤ.

On dit que l’ensemble ℕ est inclus dans l’ensemble ℤ. On note : ℕ $⊂$ ℤ.

On a également les inclusions suivantes :

ℕ $⊂$ℤ $⊂$ⅅ $⊂$ℚ $⊂$ℝ

Méthode : Reconnaître la nature d’un nombre

**Vidéo** [**https://youtu.be/pKxTaiqnyHg**](https://youtu.be/pKxTaiqnyHg)

Quel est le plus petit ensemble de nombres auquel appartient chacun des nombres suivants ?

1) $-\frac{1}{4}$ 2) $\frac{2}{6}$ 3) $1,333$ 4) $\sqrt{36}$ 5) $\sqrt{6}$ 6) $\frac{-3\left(\sqrt{2}\right)^{2}}{12}$

**Correction**

1) $-$ $\frac{1}{4}$ $=-0,25$

Donc $-$ $\frac{1}{4}$ $\in $ⅅ car le nombre de décimales après la virgule est en nombre fini.

2) $\frac{2}{6}$ $=$ $\frac{1}{3}$ $≈0,3333…$

Donc $\frac{2}{6}\in Q$ car $\frac{2}{6}$ s’écrit uniquement sous forme d’une fraction et ne peut pas s’écrire sous forme décimale.

3) $1,333$ $\in $ⅅ car le nombre de décimales est en nombre fini.

4) $\sqrt{36}=6$

Donc $\sqrt{36}\in $ ℕ car $6$ est un nombre entier positif.

5) $\sqrt{6}≈2,4495…$

Donc $\sqrt{6}$ $\in $ℝ car c’est un nombre irrationnel.

$$6) \frac{-3\left(\sqrt{2}\right)^{2}}{12}=\frac{-3×2}{12}=\frac{-6}{12}=-0,5$$

Donc $\frac{-3\left(\sqrt{2}\right)^{2}}{12}$ $\in $ⅅ car le nombre de décimales est en nombre fini.

Déterminer un arrondi d’un nombre :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/53VOST9yJfg**](https://youtu.be/53VOST9yJfg)

Méthode : Donner un encadrement d’un nombre réel

 **Vidéo** [**https://youtu.be/sJIXJT3fdcU**](https://youtu.be/sJIXJT3fdcU)

A l’aide de la calculatrice donner un encadrement à $10^{-3}$ de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$.



**Correction**

La calculatrice affiche des valeurs approchées :

Donner un encadrement à $10^{-3}$, c’est donner un encadrement d’amplitude $0,001$.

On a alors les encadrements à $10^{-3}$ : $1,414<\sqrt{2}<1,415$ et $1,732<\sqrt{3}<1,733$.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)