

MULTIPLES, DIVISEURS, NOMBRES PREMIERS

▶ **Tout le cours en vidéo** : <https://youtu.be/9l4EvLS0ezA>

Partie 1 : Multiples et diviseurs

Définition : Soit a et b deux entiers naturels.

On dit que a est un **multiple** de b s'il existe un entier k tel que $a = kb$.

Remarque : On dit alors que b est un **diviseur** de a .

Exemple :

15 est un multiple de 3, car $15 = k \times 3$ avec $k = 5$.

Méthode : Démontrer qu'un nombre est un multiple ou un diviseur

▶ **Vidéo** <https://youtu.be/umlnJooSDas>

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- 1) 36 est un multiple de 12.
- 2) 28 est un multiple de 8.
- 3) 6 est un diviseur de 54.
- 4) 7 est un diviseur de 24.

Correction

- 1) VRAI : 36 est un multiple de 12, car $36 = k \times 12$ avec $k = 3$.
- 2) FAUX : 28 n'est pas un multiple de 8 car il n'existe pas d'entier k tel que $28 = k \times 8$.
- 3) VRAI : 6 est un diviseur de 54, car $54 = k \times 6$ avec $k = 9$.
- 4) FAUX : 7 n'est pas un diviseur de 24 car il n'existe pas d'entier k tel que $24 = k \times 7$.

Propriété : La somme de deux multiples d'un entier a est un multiple de a .

Exemple :

700 et 21 sont des multiples de 7 donc :

$721 = 700 + 21$ est un multiple de 7.

Démonstration au programme : avec $a = 3$

▶ **Vidéo** <https://youtu.be/4an6JTwrJV4>

Démontrons que la somme de deux multiples de 3 est un multiple de 3.

Soit b et c deux multiples de 3.

Comme b est un multiple de 3, il existe un entier k_1 tel que $b = 3k_1$.

Comme c est un multiple de 3, il existe un entier k_2 tel que $c = 3k_2$.

Alors : $b + c = 3k_1 + 3k_2 = 3(k_1 + k_2) = 3k$, où $k = k_1 + k_2$.
 $k = k_1 + k_2$ est un entier car somme de deux entiers, donc $b + c = 3k$ avec k entier.
 $b + c$ est donc un multiple de 3.

Méthode : Résoudre un problème avec des multiples ou des diviseurs

 Vidéo <https://youtu.be/7nU2M-zhAjk>

Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

Correction

Soit trois entiers consécutifs qui peuvent donc s'écrire sous la forme :

$n, n + 1$ et $n + 2$, où n est un entier quelconque.

Leur somme est :

$$S = n + (n + 1) + (n + 2) = n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1).$$

Donc $S = k \times 3$, avec $k = n + 1$ entier.

On en déduit que S est un multiple 3.

Partie 2 : Nombres pairs, nombres impairs

Définition : Un nombre **pair** est un multiple de 2.

Un nombre **impair** est un nombre qui n'est pas pair.

Exemples :

- 34 est pair, car c'est un multiple de 2, on a $34 = 17 \times 2$
- 57 est impair car il n'existe pas d'entier k tel que $57 = k \times 2$.

Propriétés : Un nombre pair s'écrit sous la forme $2k$, avec k entier.

Un nombre impair s'écrit sous la forme $2k + 1$, avec k entier.

Exemples :

- $34 = 2 \times k$, avec $k = 17$.
- $57 = 2 \times k + 1$, avec $k = 28$.

Propriétés :

Écrit de façon abrégée, on a :

PAIR + PAIR → PAIR

PAIR + IMPAIR → IMPAIR

IMPAIR + IMPAIR → PAIR

PAIR x NOMBRE → PAIR

IMPAIR x IMPAIR → IMPAIR

Méthode : Déterminer la parité d'un nombre

 Vidéo <https://youtu.be/cE3gOMZ0Kko>

Quelle est la parité de $5\,678\,984^2 + 1$

Correction

$$5\,678\,984^2 = \underbrace{5\,678\,984}_{\text{PAIR}} \times \underbrace{5\,678\,984}_{\text{PAIR}}$$

Donc $5\,678\,984^2$ est pair car PAIR \times PAIR \rightarrow PAIR

On peut donc écrire $5\,678\,984^2 = 2k$, avec k entier.

Et donc :

$5\,678\,984^2 + 1 = 2k + 1$ est impair.

Propriété : Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration au programme :

 Vidéo <https://youtu.be/eKo1MpX9ktw>

Soit a est un nombre impair. Alors il s'écrit sous la forme $a = 2k + 1$, avec k entier.

Donc $a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$, avec $k' = 2k^2 + 2k$.

k' est entier car somme de deux entiers, donc a^2 s'écrit sous la forme $a^2 = 2k' + 1$ et donc a^2 est impair.

Méthode : Résoudre un problème avec des nombres pairs ou impairs

 Vidéo <https://youtu.be/xCLLqx11Le0>

 Vidéo https://youtu.be/3Gv_z0pM9pM

Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Correction

Soit deux entiers consécutifs n et $n + 1$.

- Si n est pair, alors il s'écrit sous la forme $n = 2k$, avec k entier.

Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :

$$n(n + 1) = 2k(2k + 1) = 2k_1, \text{ avec } k_1 = k(2k + 1) \text{ entier.}$$

Donc $n(n + 1)$ est pair.

- Si n est impair, alors il s'écrit sous la forme $n = 2k + 1$, avec k entier.

Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :

$$n(n + 1) = (2k + 1)(2k + 2) = 2(2k + 1)(k + 1) = 2k_2, \text{ avec } k_2 = (2k + 1)(k + 1) \text{ entier.}$$

Donc $n(n + 1)$ est pair.

Dans tous les cas, le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Définition : On dit qu'une fraction est irréductible, lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Méthode : Rendre une fraction irréductible

 **Vidéo** <https://youtu.be/qZaTliAWkA0>

Rendre irréductible la fraction $\frac{60}{126}$.

Correction

Pour rendre une fraction irréductible, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produit de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l}
 60 & 2 \\
 30 & 2 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 1 &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 126 & 2 \\
 63 & 3 \\
 21 & 3 \\
 7 & 7 \\
 1 &
 \end{array}$$

On a ainsi les décompositions de 60 et 126 :

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \text{ et } 126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$$

$$\text{On a : } \frac{60}{126} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 3 \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$$

10 et 21 n'ont pas de diviseur commun autre que 1 et donc :

$$\frac{10}{21} \text{ est la fraction irréductible égale à } \frac{60}{126}.$$



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales