NOTION DE MULTIPLE, DIVISEUR ET NOMBRE PREMIER

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/9I4EvLS0ezA

I. Nombres entiers

Vidéo https://youtu.be/HMY31orMLjs

1. Nombres entiers naturels

Un nombre entier naturel est un nombre entier qui est positif.
L'ensemble des **nombres entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ...\}$.

Exemples :
$4 \in \mathbb{N}$
$-2 \notin \mathbb{N}$

2. Nombres entiers relatifs

Un nombre entier relatif est un nombre entier qui est positif ou négatif.
L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est noté $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} = \{... ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...\}$.

Exemples :
$-2 \in \mathbb{Z}$
$5 \in \mathbb{Z}$
$0,33 \notin \mathbb{Z}$

II. Multiples et diviseurs

Définition : Soit a et b deux entiers. On dit que a est un multiple de b s'il existe un entier k tel que $a = k\,b$. On dit alors que b est un diviseur de a.

Exemples et contre-exemple :
a) 15 est un multiple de 3, car 15 = k × 3 avec k = 5.
b) 10 est un diviseur de 40, car 40 = k × 10 avec k = 4.
c) Par contre, 13 n'est pas un multiple de 3 car il n'existe pas d'entier k tel que 13 = k × 3.

Propriété :
La somme de deux multiples d'un entier a est un multiple de a.

Démonstration au programme : avec $a = 3$

Vidéo https://youtu.be/4an6JTwrJV4

Soit b et c deux multiples de 3.
Comme b est un multiple de 3, il existe un entier k_1 tel que $b = 3k_1$.
Comme c est un multiple de 3, il existe un entier k_2 tel que $c = 3k_2$.
Alors : $b + c = 3k_1 + 3k_2 = 3(k_1 + k_2) = 3k$, où $k = k_1 + k_2$.
$k = k_1 + k_2$ est un entier car somme de deux entiers, donc $b + c = 3k$ avec k entier.
$b + c$ est donc un multiple de 3.

Méthode : Résoudre un problème avec des multiples ou des diviseurs

Vidéo https://youtu.be/7nU2M-zhAjk

Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

Soit trois entiers consécutifs qui peuvent donc s'écrire sous la forme :
n, $n + 1$ et $n + 2$, où n est un entier quelconque.
Leur somme est $S = n + (n + 1) + (n + 2) = n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$.
Soit k l'entier tel que, $k = n + 1$.

Donc $S = 3k$, avec k entier.
On en déduit que S est un multiple 3.

III. Nombres pairs, impairs

Définition : Un nombre **pair** est un multiple de 2.
Un nombre **impair** est un nombre qui n'est pas pair.

Exemples :
34, 68, 9756786 et 0 sont des nombres pairs
567, 871 et 1 sont des nombres impairs.

Propriétés :

Écrit de façon abrégée, on a :
PAIR + PAIR ➔ PAIR
PAIR + IMPAIR ➔ IMPAIR
IMPAIR + IMPAIR ➔ PAIR

PAIR x NOMBRE ➔ PAIR
IMPAIR x IMPAIR ➔ IMPAIR

Propriétés : Un nombre pair s'écrit sous la forme $2k$, avec k entier.
Un nombre impair s'écrit sous la forme $2k+1$, avec k entier.

Propriété : Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/eKo1MpX9ktw

Soit a est un nombre impair. Alors il s'écrit sous la forme $a = 2k+1$, avec k entier.
Donc $a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$, avec $k' = 2k^2 + 2k$.
k' est entier car somme de deux entiers, donc a^2 s'écrit sous la forme $a^2 = 2k' + 1$ et donc a^2 est impair.

Méthode : Résoudre un problème avec des nombres pairs ou impairs

Vidéo https://youtu.be/xCLLqx11Le0
Vidéo https://youtu.be/cE3gOMZ0Kko
Vidéo https://youtu.be/3Gv_z0pM9pM

Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Soit deux entiers consécutifs n et $n+1$.

- Si n est pair, alors il s'écrit sous la forme $n = 2k$, avec k entier.
Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :
$n(n+1) = 2k(2k+1) = 2k_1$, avec $k_1 = k(2k+1)$ entier.
Donc $n(n+1)$ est pair.

- Si n est impair, alors il s'écrit sous la forme $n = 2k+1$, avec k entier.
Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :
$n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1) = 2k_2$, avec $k_2 = (2k+1)(k+1)$ entier.
Donc $n(n+1)$ est pair.

Dans tous les cas, le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

IV. Nombres premiers (Rappels)

Définition : Un nombre est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs qui sont 1 et lui-même.

Exemples :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, … Cette liste est infinie.

Remarque :
Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

Exercice : Démontrer qu'un nombre est premier

Vidéo https://youtu.be/kLs0Tilz7lc

Définition : On dit que deux nombres sont **premiers entre eux** lorsque leur seul diviseur commun est 1.

Propriété :
Tout nombre non premier peut se décomposer en produits de facteurs premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Exemple :
300 = **2 x 2 x 3 x 5 x 5**

Définition : On dit qu'une fraction est irréductible, lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Méthode : Rendre une fraction irréductible

Vidéo https://youtu.be/qZaTliAWkA0

Rendre irréductible la fraction $\frac{60}{126}$.

Pour rendre une fraction irréductible, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

On ainsi les décompositions de 60 et 126 :

60 = 2 x 2 x 3 x 5 et 126 = 2 x 3 x 3 x 7

On a : $\frac{60}{126} = \frac{2\times2\times3\times5}{2\times3\times3\times7} = \frac{2\times5}{3\times7} = \frac{10}{21}$

10 et 21 sont premiers entre eux et donc :

$\frac{10}{21}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{60}{126}$.