

LES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/DUAbkwCX8O8>

Partie 1 : Fonction paire, fonction impaire

1. Fonction paire

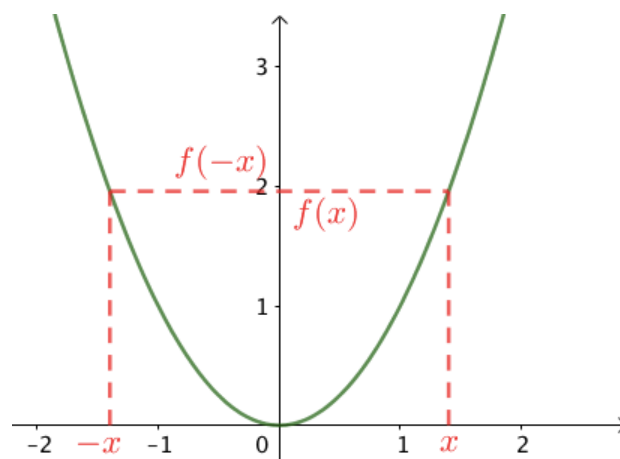
Définition : Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est une **fonction paire**.

Remarque :

Pour une fonction paire, on a :

$$f(-x) = f(x).$$

C'est ce résultat qu'il faudra vérifier pour prouver qu'une fonction est paire.



Méthode : Démontrer qu'une fonction est paire

Vidéo <https://youtu.be/ohEL-ZQYAy4>

Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = 5x^2 + 3$ est paire.

Correction

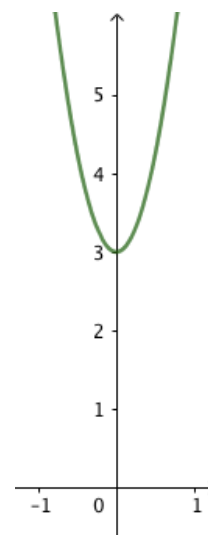
On a :

$$f(-x) = 5(-x)^2 + 3 = 5x^2 + 3$$

$$\text{Donc } f(-x) = f(x)$$

La fonction f est donc paire.

Sa représentation graphique (ci-contre) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



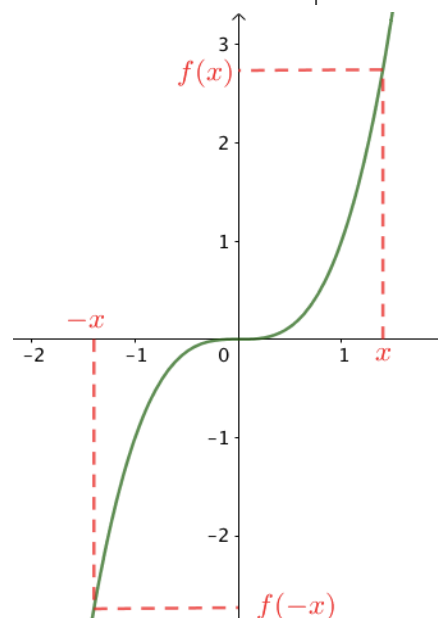
2. Fonction impaire

Définition : Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère est une **fonction impaire**.

Remarque :

Pour une fonction impaire, on a : $f(-x) = -f(x)$.

C'est ce résultat qu'il faudra vérifier pour prouver qu'une fonction est impaire.



Méthode : Démontrer qu'une fonction est impaire

▶ Vidéo <https://youtu.be/pGOJNDLgEDY>

Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x$ est impaire.

Correction

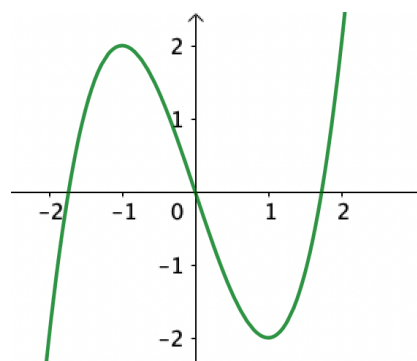
On a :

$$f(-x) = (-x)^3 - 3 \times (-x) = -x^3 + 3x$$

$$\text{Et } -f(x) = -(x^3 - 3x) = -x^3 + 3x$$

$$\text{Donc } f(-x) = -f(x).$$

La fonction f est donc impaire. Sa représentation graphique (ci-contre) est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Partie 2 : Fonction carré

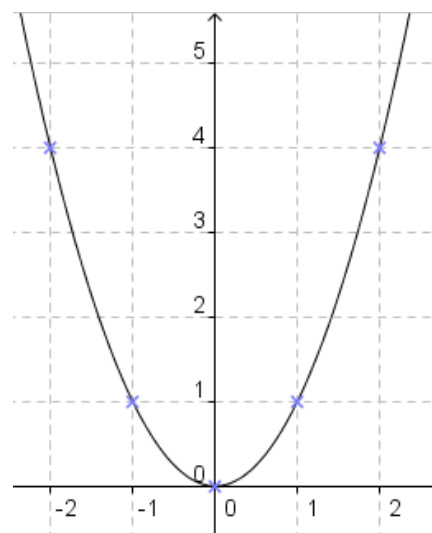
Définition : La **fonction carré** est la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

Remarque :

Dire que la fonction carré est **définie sur** \mathbb{R} signifie que x peut prendre n'importe quelle valeur de \mathbb{R} .

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

La courbe d'équation $y = x^2$ de la fonction carré est appelée une **parabole**.



Propriété : La courbe d'équation $y = x^2$ de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La fonction carré est paire.

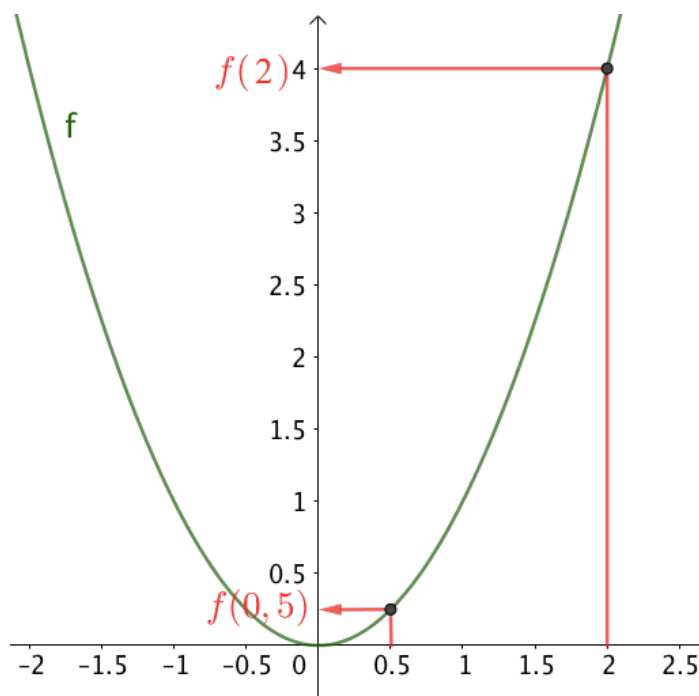
Méthode : Comparer des images

▶ Vidéo <https://youtu.be/-d3fE8d0YOc>

- 1) Représenter la fonction carré f dans un repère.
- 2) a) Comparer graphiquement les nombres $f(0,5)$ et $f(2)$.
b) Même question avec $f(-1,5)$ et $f(-1)$.
- 3) Vérifier par calcul le résultat de la question 2b.

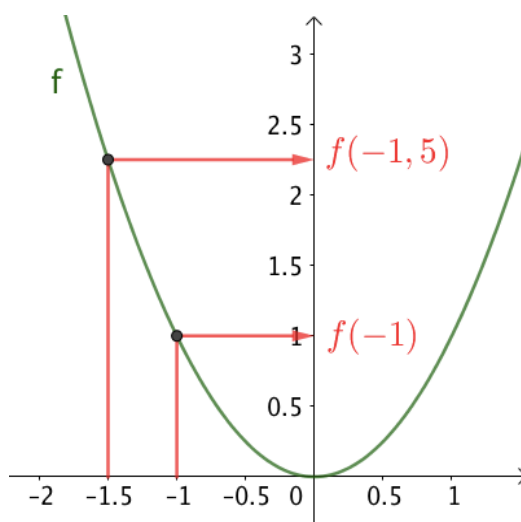
Correction

1)



2) a) En traçant les images de 0,5 et de 2 par la fonction f , on constate que : $f(0,5) < f(2)$.

b) En traçant les images de -1,5 et de -1 par la fonction f , on constate que : $f(-1) < f(-1,5)$.



3) On a $f(x) = x^2$.

Ainsi : $f(-1,5) = (-1,5)^2 = 2,25$.

$f(-1) = (-1)^2 = 1$

On en déduit que $f(-1) < f(-1,5)$.

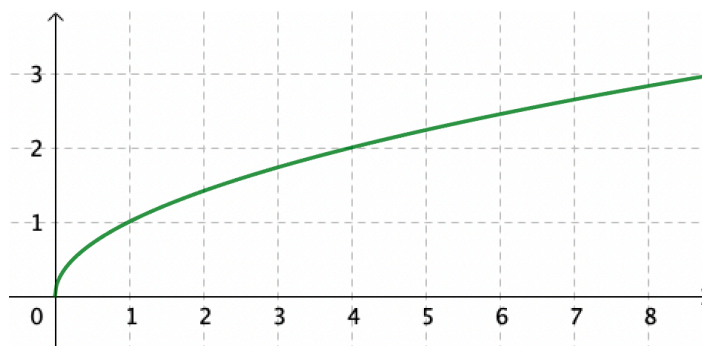
Résoudre une inéquation avec la fonction carré :

▶ Vidéo https://youtu.be/Xv_mdK9kaCA

Partie 3 : Fonction racine carrée

Définition : La **fonction racine carrée** est la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Remarque : La fonction racine carrée n'est pas définie pour des valeurs négatives.



Résoudre une inéquation avec la fonction racine carrée :

▶ Vidéo <https://youtu.be/UPI7RoS0Vhg>

Partie 4 : Fonction inverse

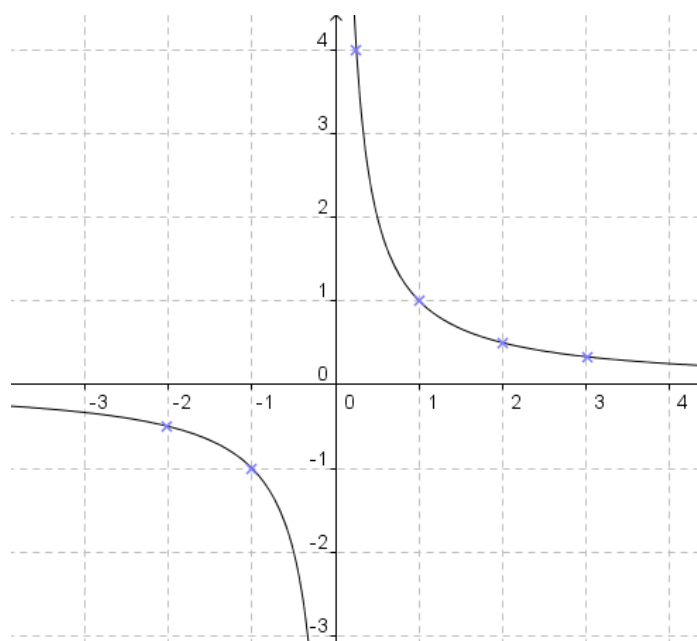
Définition : La **fonction inverse** est la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Remarques :

- Dire que la fonction inverse est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ signifie que x peut prendre n'importe quelle valeur de \mathbb{R} sauf 0.
On dit que la fonction inverse n'est pas définie en 0.
- L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ peut se noter également $] -\infty ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$ ou encore \mathbb{R}^* .

x	-2	-1	0,25	1	2	3
$f(x)$	-0,5	-1	4	1	0,5	$\frac{1}{3}$

La courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ de la fonction inverse est appelée une **hyperbole**.



Propriété : La courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine du repère. La fonction inverse est impaire.

Méthode : Calculer une image ou un antécédent par la fonction inverse

 Vidéo <https://youtu.be/gHDcYSHfSlk>

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = 2 + \frac{3}{x}$

- a) Calculer les images de 3 et de 6 par la fonction f .
 b) Calculer l'antécédent de 7 par la fonction f .

Correction

a) - Image de 3 :

$$f(3) = 2 + \frac{3}{3} = 2 + 1 = 3.$$

L'image de 3 est 3.

- Image de 6 :

$$f(6) = 2 + \frac{3}{6} = 2 + 0,5 = 2,5$$

L'image de 6 est 2,5.

b) Antécédent de 7 :

On résout l'équation $f(x) = 7$

$$\text{Soit : } 2 + \frac{3}{x} = 7$$

$$\frac{3}{x} = 7 - 2$$

$$\frac{3}{x} = 5$$

$$\frac{x}{3} = \frac{1}{5}$$

$$x = 3 \times \frac{1}{5}$$

$$x = \frac{3}{5}$$

L'antécédent de 7 est $\frac{3}{5}$.

Résoudre une inéquation avec la fonction inverse :

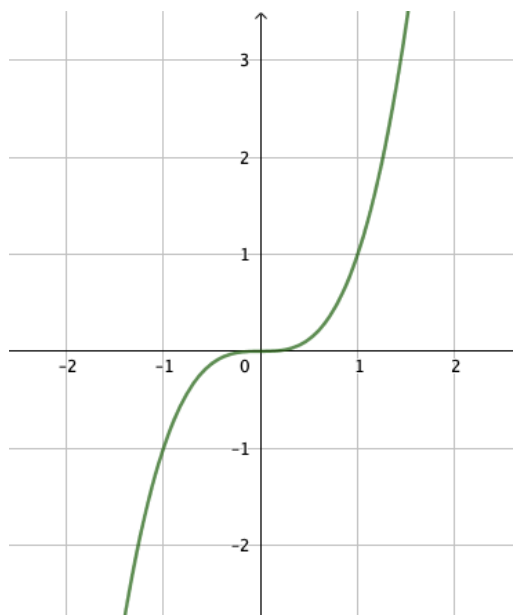
 Vidéo <https://youtu.be/V07NxCl7Eto>

Partie 5 : Fonction cube

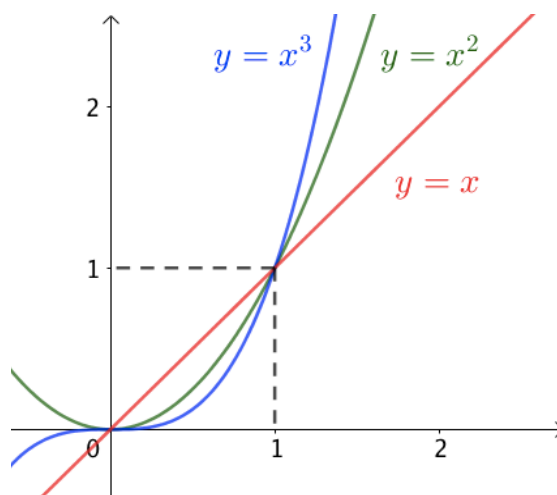
1. Définition et représentation graphique

Définition : La **fonction cube** est la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$.

Propriété : La courbe d'équation $y = x^3$ de la fonction cube est symétrique par rapport à l'origine du repère. La fonction cube est impaire.



2. Positions relatives des courbes d'équations : $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$



Propriété : Pour des valeurs positives de x , on a :

- Si $x \geq 1$: La courbe d'équation $y = x^3$ se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = x^2$ qui se trouve elle-même au-dessus de la courbe d'équation $y = x$.
- Si $0 \leq x \leq 1$: L'ordre précédent est inversé.

Démonstration au programme :

📺 Vidéo <https://youtu.be/op54acayjIQ>

• **1^{er} cas : si $x \geq 1$:**

- Pour étudier les positions relatives des courbes d'équations $y = x$ et $y = x^2$, il suffit d'étudier le signe de $x^2 - x$.

Or, $x^2 - x = x(x - 1) \geq 0$ car $x \geq 1$.

Donc, la courbe d'équation $y = x^2$ se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = x$.

- Pour étudier les positions relatives des courbes d'équations $y = x^2$ et $y = x^3$, il suffit d'étudier le signe de $x^3 - x^2$.

Or, $x^3 - x^2 = x^2(x - 1) \geq 0$ car $x \geq 1$.

Donc la courbe d'équation $y = x^3$ se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = x^2$.

• **2e cas : si $0 \leq x \leq 1$:**

- Dans ce cas, $x^2 - x = x(x - 1) \leq 0$ car $x \geq 0$ et $x - 1 \leq 0$.

Donc, la courbe d'équation $y = x^2$ se trouve en dessous de la courbe d'équation $y = x$.

- Et, $x^3 - x^2 = x^2(x - 1) \leq 0$ car $x - 1 \leq 0$.

Donc la courbe d'équation $y = x^3$ se trouve en dessous de la courbe d'équation $y = x^2$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales