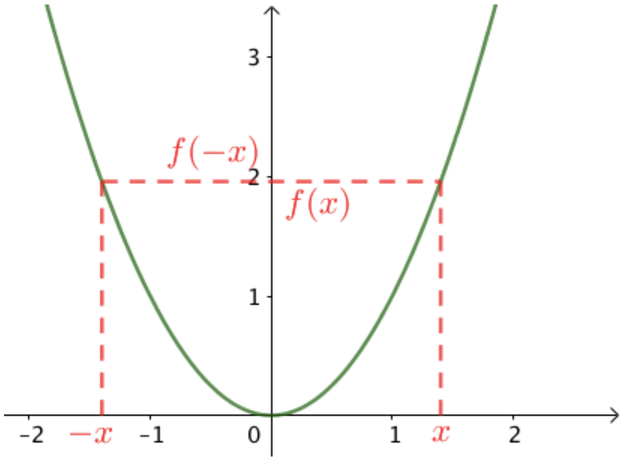
LES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/DUbAkwCX8O8

Partie 1 : Fonction paire, fonction impaire

1. Fonction paire



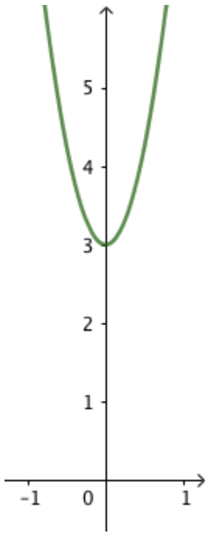
Définition : Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est une **fonction paire**.

Remarque :
Pour une fonction paire, on a :
$f(-x) = f(x)$.
C'est ce résultat qu'il faudra vérifier pour prouver qu'une fonction est paire.

Méthode : Démontrer qu'une fonction est paire

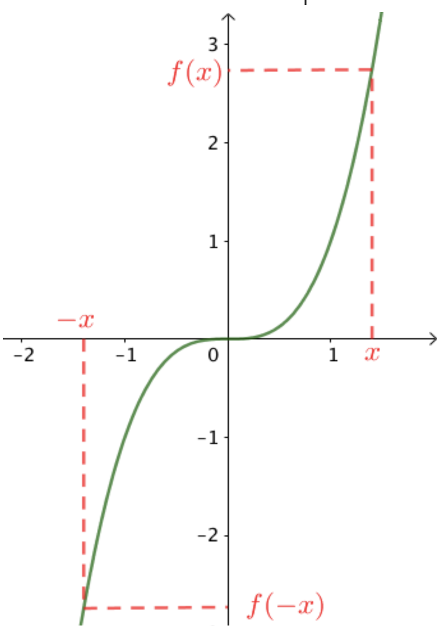
Vidéo https://youtu.be/oheL-ZQYAy4

Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = 5x^2 + 3$ est paire.



Correction
On a :
$f(-x) = 5(-x)^2 + 3 = 5x^2 + 3$
Donc $f(-x) = f(x)$
La fonction f est donc paire.
Sa représentation graphique (ci-contre) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Fonction impaire



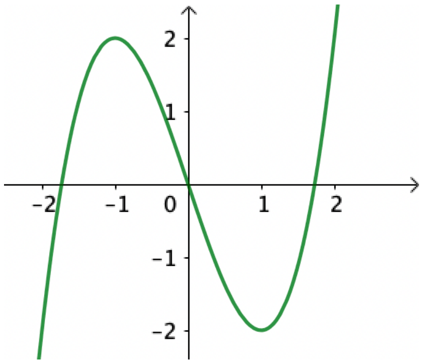
Définition : Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère est une **fonction impaire**.

Remarque :
Pour une fonction impaire, on a : $f(-x) = -f(x)$.
C'est ce résultat qu'il faudra vérifier pour prouver qu'une fonction est impaire.

Méthode : Démontrer qu'une fonction est impaire

Vidéo https://youtu.be/pG0JNDLgEDY

Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x$ est impaire.



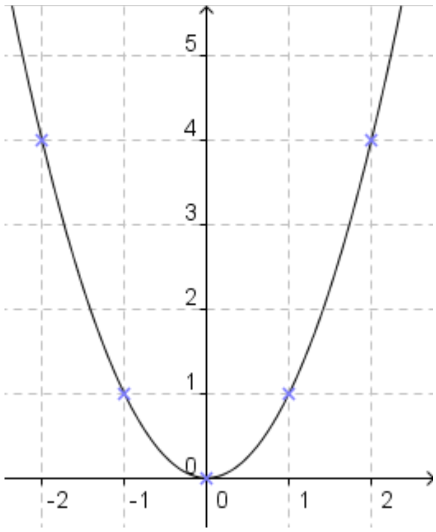
Correction
On a :
$f(-x) = (-x)^3 - 3 \times (-x) = -x^3 + 3x$
Et $-f(x) = -(x^3 - 3x) = -x^3 + 3x$
Donc $f(-x) = -f(x)$.
La fonction f est donc impaire. Sa représentation graphique (ci-contre) est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Partie 2 : Fonction carré

Définition : La **fonction carré** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Remarque :
Dire que la fonction carré est **définie sur** $\mathbb{R}$ signifie que x peut prendre n'importe quelle valeur de $\mathbb{R}$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4



La courbe d'équation $y = x^2$ de la fonction carré est appelée une **parabole**.

Propriété : La courbe d'équation $y = x^2$ de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La fonction carré est paire.

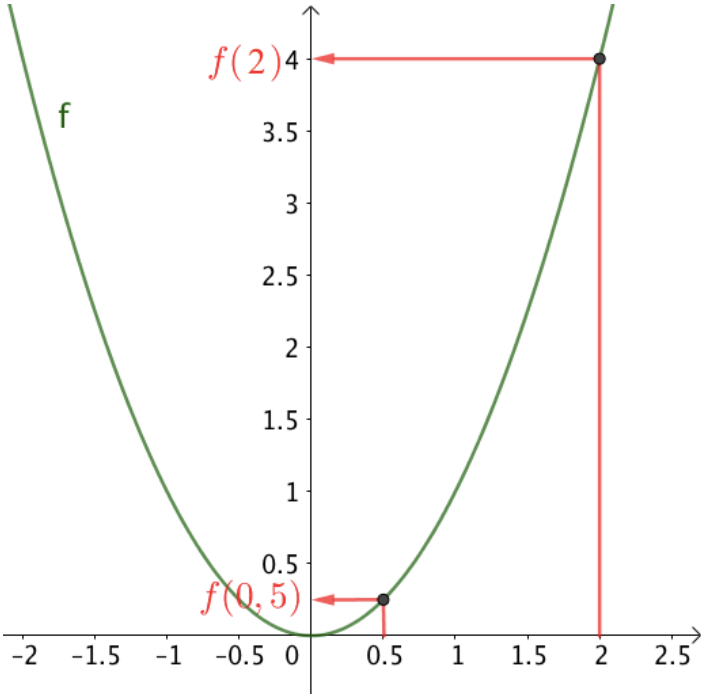
Méthode : Comparer des images

Vidéo https://youtu.be/-d3fE8d0YOc

1) Représenter la fonction carré f dans un repère.
2) a) Comparer graphiquement les nombres $f(0{,}5)$ et $f(2)$.
   b) Même question avec $f(-1{,}5)$ et $f(-1)$.
3) Vérifier par calcul le résultat de la question 2b.

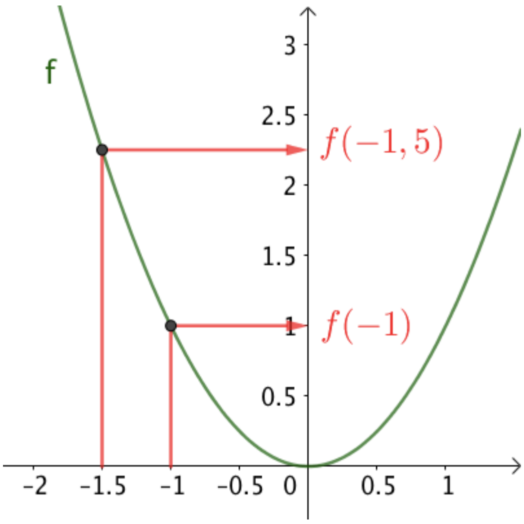
Correction

1)



2) a) En traçant les images de 0,5 et de 2 par la fonction f, on constate que :
$f(0{,}5) < f(2)$.

b) En traçant les images de – 1,5 et de – 1 par la fonction f, on constate que :
$f(-1) < f(-1{,}5)$.



3) On a $f(x) = x^2$.

Ainsi : $f(-1{,}5) = (-1{,}5)^2 = 2{,}25$.

$f(-1) = (-1)^2 = 1$

On en déduit que $f(-1) < f(-1{,}5)$.

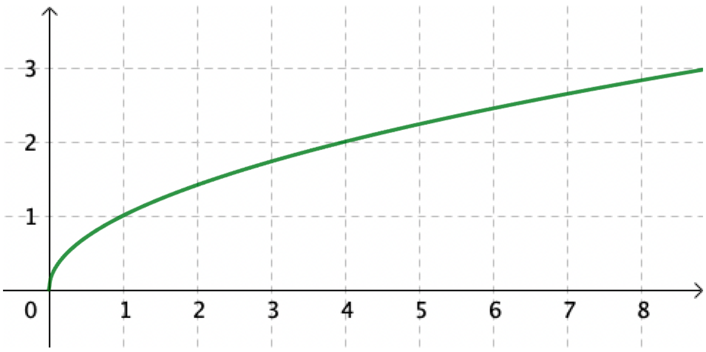
Résoudre une inéquation avec la fonction carré :

Vidéo https://youtu.be/Xv_mdK9kaCA

Partie 3 : Fonction racine carrée

Définition : La **fonction racine carrée** est la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

Remarque : La fonction racine carrée n'est pas définie pour des valeurs négatives.



Résoudre une inéquation avec la fonction racine carrée :

Vidéo https://youtu.be/UPI7RoS0Vhg

Partie 4 : Fonction inverse

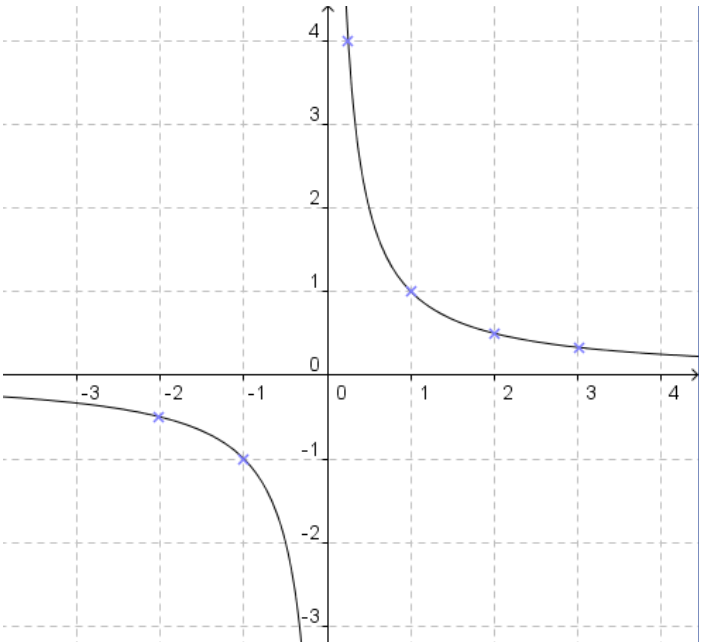
Définition : La **fonction inverse** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Remarques :

- Dire que la fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ signifie que x peut prendre n'importe quelle valeur de $\mathbb{R}$ sauf 0.
  On dit que la fonction inverse n'est pas définie en 0.
- L'ensemble $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ peut se noter également $]-\infty\ ;\ 0\ [\cup]\ 0\ ;\ +\infty\ [$ ou encore $\mathbb{R}^*$.

x	-2	-1	$0{,}25$	1	2	3
$f(x)$	$-0{,}5$	-1	4	1	$0{,}5$	$\dfrac{1}{3}$

La courbe d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ de la fonction inverse est appelée une **hyperbole**.



Propriété : La courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine du repère. La fonction inverse est impaire.

Méthode : Calculer une image ou un antécédent par la fonction inverse

Vidéo https://youtu.be/gHDcYSHfSlk

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = 2 + \frac{3}{x}$

a) Calculer les images de 3 et de 6 par la fonction f.
b) Calculer l'antécédent de 7 par la fonction f.

Correction

a) - Image de 3 :
$f(3) = 2 + \frac{3}{3} = 2 + 1 = 3.$
L'image de 3 est 3.

- Image de 6 :
$f(6) = 2 + \frac{3}{6} = 2 + 0{,}5 = 2{,}5$
L'image de 6 est 2,5.

b) Antécédent de 7 :
On résout l'équation $f(x) = 7$
Soit : $2 + \frac{3}{x} = 7$

$$\frac{3}{x} = 7 - 2$$
$$\frac{3}{x} = 5$$
$$\frac{3}{x} = \frac{5}{1}$$
$$x = \frac{3 \times 1}{5}$$
$$x = \frac{3}{5}$$

L'antécédent de 7 est $\frac{3}{5}$.

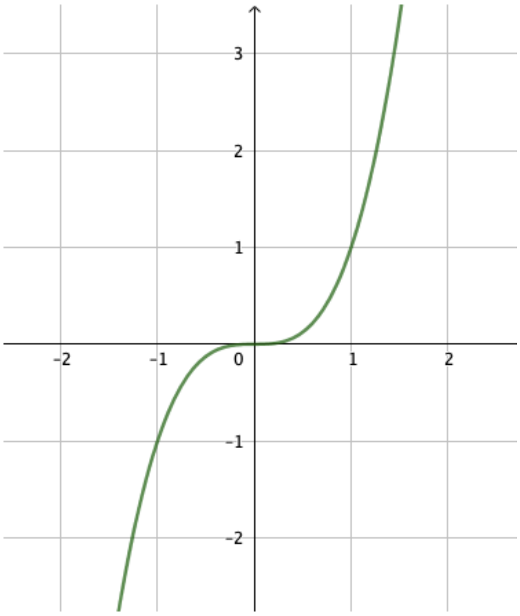
Résoudre une inéquation avec la fonction inverse :

Vidéo https://youtu.be/V07NxCl7Eto

Partie 5 : Fonction cube

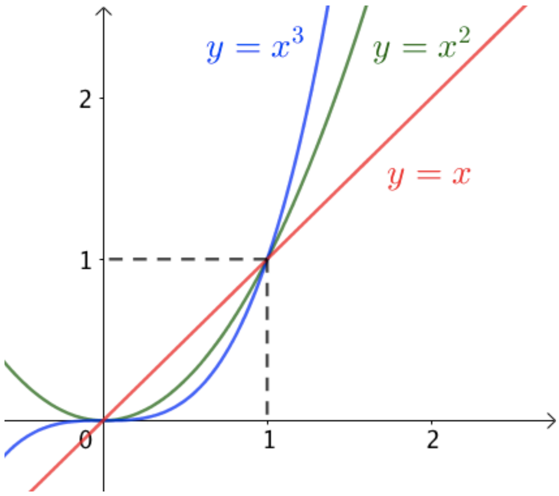
1. Définition et représentation graphique

Définition : La **fonction cube** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.



Propriété : La courbe d'équation $y = x^3$ de la fonction cube est symétrique par rapport à l'origine du repère. La fonction cube est impaire.

2. Positions relatives des courbes d'équations : $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$



Propriété : Pour des valeurs positives de x, on a :
- Si $x \geq 1$: La courbe d'équation $y = x^3$ se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = x^2$ qui se trouve elle-même au-dessus de la courbe d'équation $y = x$.
- Si $0 \leq x \leq 1$: L'ordre précédent est inversé.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/op54acayjIQ

- **1er cas : si $x \geq 1$:**

- Pour étudier les positions relatives des courbes d'équations $y = x$ et $y = x^2$, il suffit d'étudier le signe de $x^2 - x$.

Or, $x^2 - x = x(x-1) \geq 0$ car $x \geq 1$ et $x \geq 0$.
Donc, la courbe d'équation $y = x^2$ se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = x$.
- Pour étudier les positions relatives des courbes d'équations $y = x^2$ et $y = x^3$, il suffit d'étudier le signe de $x^3 - x^2$.
Or, $x^3 - x^2 = x^2(x-1) \geq 0$ car $x \geq 1$ et $x^2 \geq 0$.
Donc la courbe d'équation $y = x^3$ se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = x^2$.

- **2e cas : si $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{1}$:**

- Dans ce cas, $x^2 - x = x(x-1) \leq 0$ car $x \geq 0$ et $x - 1 \leq 0$.
Donc, la courbe d'équation $y = x^2$ se trouve en dessous de la courbe d'équation $y = x$.
- Et, $x^3 - x^2 = x^2(x-1) \leq 0$ car $x - 1 \leq 0$ et $x^2 \geq 0$.
Donc la courbe d'équation $y = x^3$ se trouve en dessous de la courbe d'équation $y = x^2$.