GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

I. Définitions et notations

1) Définition

Exemple :
On considère la fonction f qui exprime l'aire d'un rectangle de dimensions 3 et x.
Une expression littérale de f est donc : $f(x) = 3x$.

Définition et notation :
Une fonction f associe à tout nombre réel x un unique nombre réel, noté $f(x)$.
On note également : $x \mapsto f(x)$ ou $y = f(x)$.

2) Image et antécédent

Pour la fonction f définie plus haut, on a : $f(1) = 3 \times 1 = 3$ $\quad f(4) = 3 \times 4 = 12$

On dit que :
- l'image de 1 par la fonction f est 3.
- un antécédent de 3 par f est 1.

$1 \mapsto 3$

Antécédent de 3

Image de 1

Remarques :
- Un nombre possède une unique image.
- Cependant, un nombre peut posséder plusieurs antécédents.

Méthode : Calculer une image ou un antécédent

Vidéo https://youtu.be/8j_4DHWnRJU
Vidéo https://youtu.be/X0oOBo65YpE

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x} + 1$
1) Compléter le tableau de valeurs :

x	4	10,24	16	20,25
$\sqrt{x}+1$				

2) Compléter alors :
   a) L'image de 4 par f est …
   b) Un antécédent de 5 par f est …
   c) f : … $\mapsto$ 4,2

d) $f(20,25) = \ldots$

3) Calculer $f(4,41)$ et $f(1310,44)$

1)

x	4	10,24	16	20,25
$\sqrt{x}+1$	**3**	**4,2**	**5**	**5,5**

2) a) L'image de 4 par f est **3**.
b) Un antécédent de 5 par f est **16**.
c) f : **10,24** $\mapsto$ 4,2
d) $f(20,25)$ = **5,5**

3) $f(4,41) = \sqrt{4,41} + 1 =$ **3,1**
$f(1310,44) = \sqrt{1310,44} + 1 =$ **37,2**

II. Représentation graphique

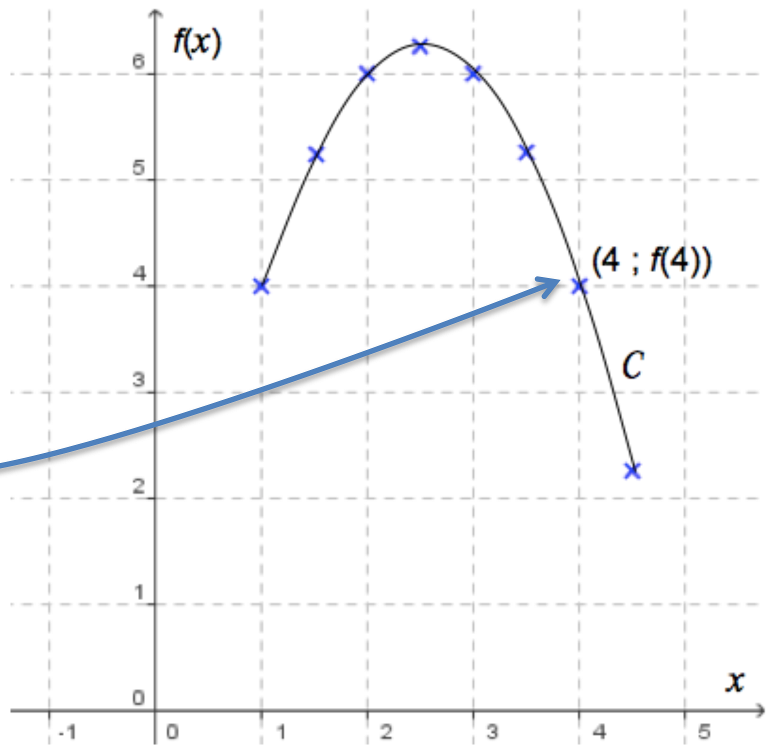
Vidéo https://youtu.be/xHJNdrhzY4Q

On considère la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.
On réalise le tableau de valeurs suivant :

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
f	4	5,25	6	6,25	6	5,25	4	2,25

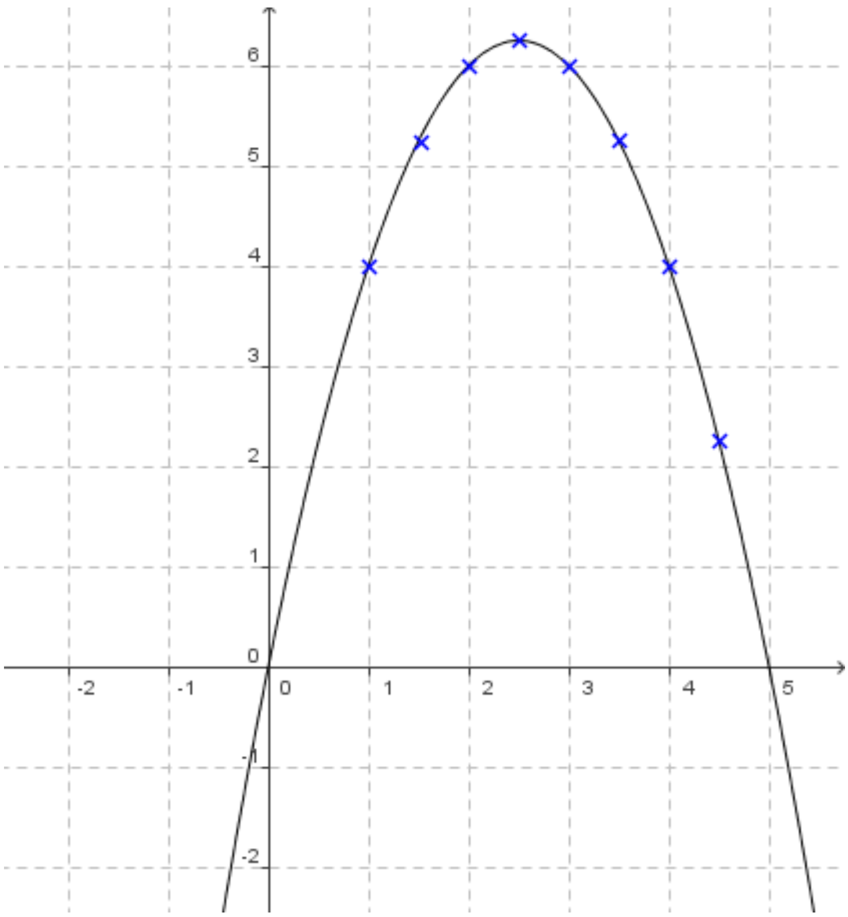
On représente les données du tableau de valeurs dans un repère tel qu'on lise x en abscisse et $f(x)$ en ordonnée.

En reliant les points, on obtient la courbe *C*.
Tout point de la courbe *C* possède donc des coordonnées de la forme $(x\,;f(x))$.



Ouvrir le logiciel *GeoGebra* et saisir directement l'expression de la fonction f.

Dans la barre de saisie, on écriera : f(*x*)=5*x*-*x*^2



La courbe représentative de la fonction f dépasse les limites du tableau de valeurs. En effet, l'expression de la fonction f accepte par exemple des valeurs négatives de x.

III. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

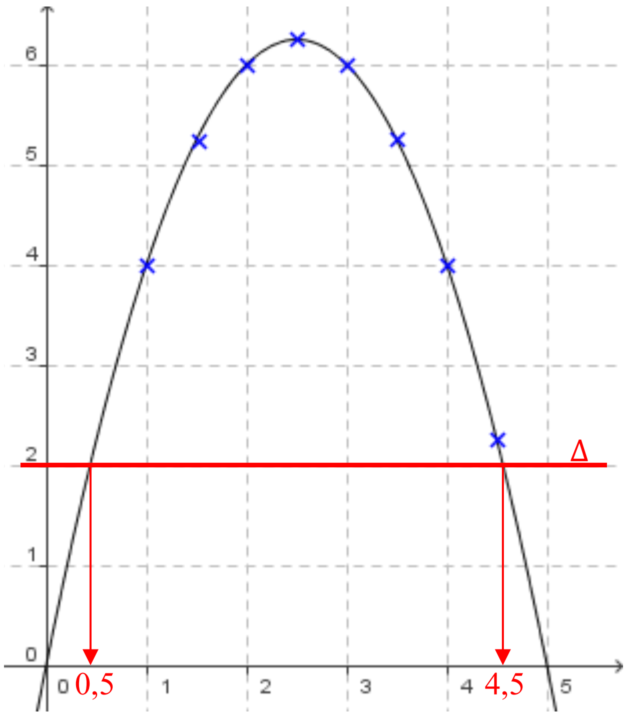
Méthode : Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation

Vidéo **https://youtu.be/FCUd2muFEyI**
Vidéo **https://youtu.be/3_6LcpumUh4**

Répondre graphiquement aux questions suivantes :
a) Résoudre l'équation $5x - x^2 = 2$.
b) Résoudre graphiquement l'inéquation $5x - x^2 > 2$. Donner une interprétation du résultat.

a) On considère la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.
Il s'agit de trouver les antécédents de 2 par la fonction f.
Ce qui revient à résoudre l'équation $f(x) = 2$.

On détermine les abscisses des points d'intersection de la courbe *C* avec la droite Δ parallèle à l'axe des abscisses passant par le point (0 ; 2).
On lit graphiquement que l'équation $5x - x^2 = 2$ admet pour solutions : les nombres 0,5 et 4,5.



b) Résoudre l'inéquation $5x - x^2 > 2$ revient à déterminer les abscisses des points de *C* pour lesquels *C* est strictement au-dessus la droite Δ.
On lit graphiquement que l'inéquation $5x - x^2 > 2$ admet pour solutions tous les nombres de l'intervalle]0,5 ; 4,5[.

Remarques :
a) Par lecture graphique, les solutions obtenues sont approchées.
b) L'équation $f(x) = 7$ n'a pas de solution car dans ce cas la droite Δ ne coupe pas la courbe.
c) Graphiquement, on ne peut pas être certain que les solutions qui apparaissent sont les seules. Il pourrait y en avoir d'autres au-delà des limites de la représentation graphique tracée.

IV. Variations d'une fonction

1) Taux de variation

Méthode : Déterminer un taux de variation d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/xd0zEwVOmHE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + 1$.
a) Déterminer le taux de variation entre 1 et 3.
b) Interpréter géométriquement ce taux de variation.

a)

Définition :

Le **taux de variation** de la fonction f entre a et b est le nombre : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

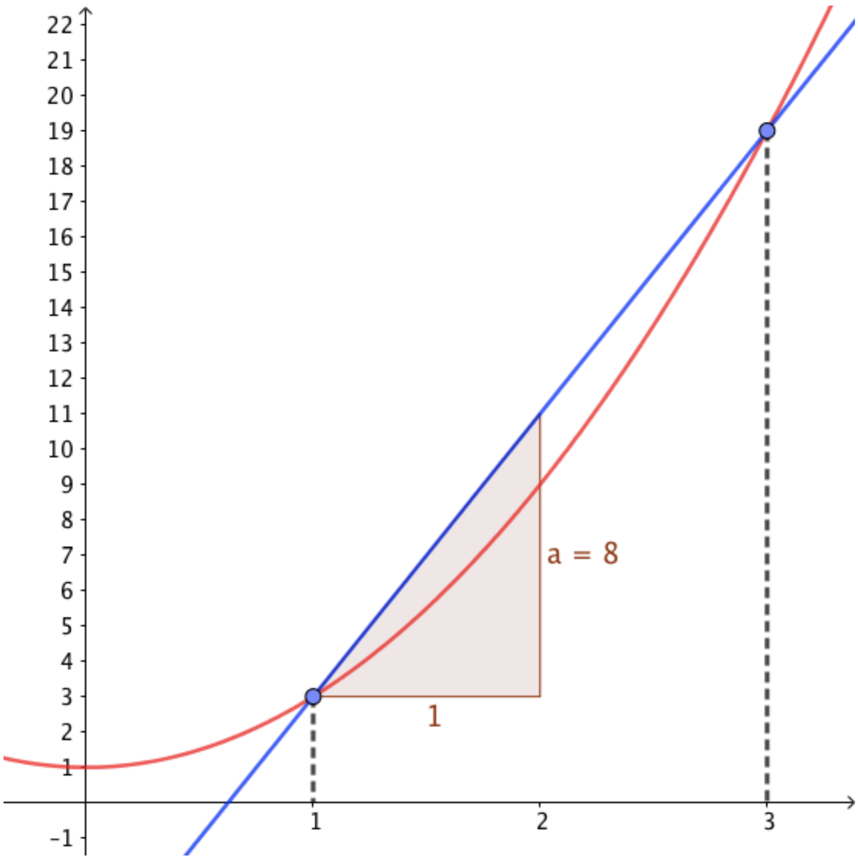
Si $f(x) = 2x^2 + 1$, alors le taux de variation de f entre 1 et 3 est égal à :

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{2\times 3^2+1-(2\times 1^2+1)}{2} = \frac{19-3}{2} = 8$$

b)

Propriété : Le taux de variation de f entre a et b est la pente de la droite passant par les points d'abscisses a et b de la courbe de f.

Le taux de variation de f entre 1 et 3 est égal à 8 donc la pente de la droite passant par les points d'abscisses 1 et 3 est égale à 8.



2) Fonctions monotones

Définition : On dit qu'une fonction f est **monotone** sur un intervalle I, si f est :
- soit croissante sur I,
- soit décroissante sur I,
- soit constante sur I.

Méthode : Étudier les variations d'une fonction à l'aide du taux de variation

Vidéo https://youtu.be/tqtZeVVJ3YU

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x - 3$.
Démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriétés :
- Si le taux de variation d'une fonction f entre deux nombres quelconques d'un intervalle I est positif, alors f est strictement croissante sur I.
- S'il est négatif, f est strictement décroissante sur I.
- S'il est nul, f est constante sur I.

On considère deux nombres quelconques a et b.
Le taux de variation de f entre a et b est égal à :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{5b - 3 - (5a - 3)}{b - a} = \frac{5b - 5a}{b - a} = \frac{5(b - a)}{b - a} = 5$$

Or, 5 > 0 donc $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$ et donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.