GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Partie 1 : Définitions et notations

1) Définition

Exemple :
On considère la fonction f qui exprime l'aire d'un rectangle de dimensions 3 et x.
Une expression littérale de f est donc : $f(x) = 3x$.

Définition et notation :
Une fonction f associe à tout nombre réel x un unique nombre réel, noté $f(x)$.
On note également : $x \mapsto f(x)$ ou $y = f(x)$.

2) Image et antécédent

Exemple :
Dire que : $f(2) = 5$ signifie que :

$2 \mapsto 5$

Antécédent de 5 — Image de 2

On dit que :
- l'**image** de 2 par la fonction f est 5.
- un **antécédent** de 5 par f est 2.

Remarques :
- Un nombre possède une unique image.
- Cependant, un nombre peut posséder plusieurs antécédents.

Méthode : Déterminer l'image d'une fonction par calcul

Vidéo https://youtu.be/8j_4DHWnRJU

Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 2$.
Calculer l'image de 6 par la fonction g.

Correction
$g(x) = x^2 - 2$
$g(6) = 6^2 - 2$
$g(6) = 36 - 2$
$g(6) = 34$
L'image de 6 par la fonction g est 34.

Méthode : Déterminer un antécédent par calcul

Vidéo https://youtu.be/X0oOBo65YpE

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x - 3$.
Déterminer un antécédent de -5 par la fonction f.

Correction
On cherche un antécédent de -5 donc -5 est une image.
On peut donc écrire : $f(x) = -5$
Soit : $2x - 3 = -5$

On résout ainsi l'équation :
$2x = 3 - 5$
$2x = -2$
$x = -1$
L'antécédent de -5 par f est donc -1.

Partie 2 : Représentation graphique

Méthode : Représenter graphiquement une fonction

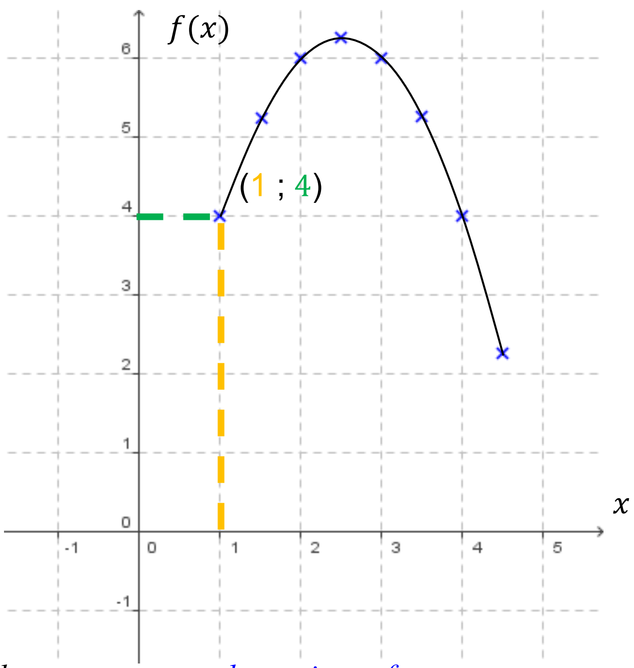
Vidéo https://youtu.be/xHJNdrhzY4Q

Soit la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.
On donne un tableau de valeurs de la fonction f :

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$f(x)$	**4**	**5,25**	**6**	**6,25**	**6**	**5,25**	**4**	**2,25**

Tracer, dans un repère, la courbe représentative de la fonction f.

Correction
On représente les données du tableau de valeurs dans un repère tel qu'on trouve en abscisse les valeurs de x et en ordonnée les valeurs de $f(x)$ correspondantes.



En reliant les points, on obtient une courbe.
Tout point de la courbe possède donc des coordonnées de la forme $(x\,;f(x))$.

Remarque :
Les images $f(x)$ se lisent sur l'axe des ordonnées (y) donc la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$ peut se noter $y = 5x - x^2$.
De façon générale, l'équation d'une courbe se note $y = f(x)$.

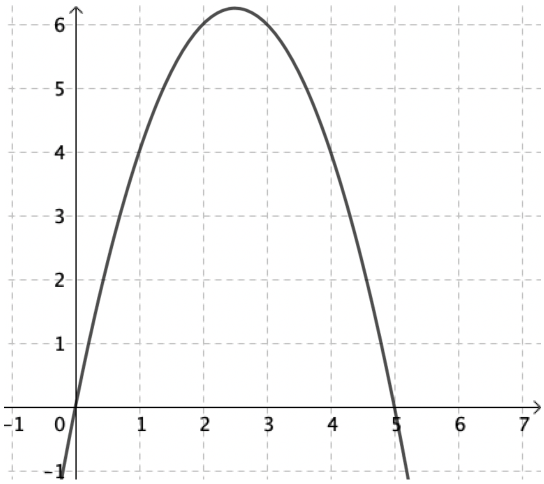
En latin, « curbus » désignait ce qui est courbé. On retrouve le mot en ancien français sous la forme de « corbe ». Le corbeau est ainsi appelé à cause de la forme de son bec.

Partie 3 : Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Méthode : Résoudre graphiquement une équation

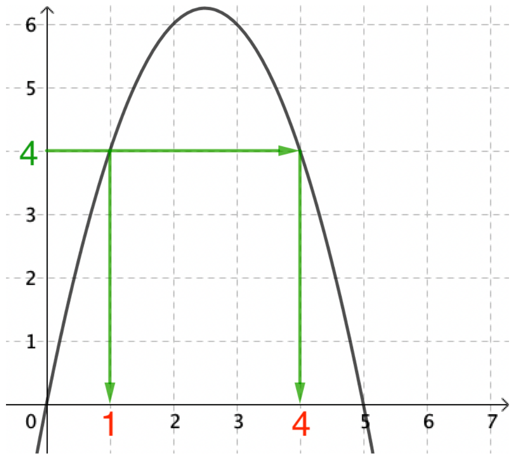
Vidéo https://youtu.be/FCUd2muFEyI

On a représenté la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.
Résoudre graphiquement l'équation $5x - x^2 = 4$.



Correction
L'équation $5x - x^2 = 4$ peut s'écrire $f(x) = 4$.
Ce qui revient à trouver les antécédents de 4 par la fonction f.
On « part » de l'ordonnée 4, on « rejoint » la courbe et on lit les solutions sur l'axe des abscisses : $x = 1$ ou $x = 4$.

On peut noter : $S = \{1 ; 4\}$.



Remarques :
- Par lecture graphique, les solutions obtenues sont approchées.
- L'équation $f(x) = 7$, par exemple, ne semble pas avoir de solution car la courbe représentée ne possède pas de point d'ordonnée 7.
- Graphiquement, on ne peut pas être certain que les solutions qui apparaissent sont les seules. Il pourrait y en avoir d'autres au-delà des limites de la représentation graphique tracée.

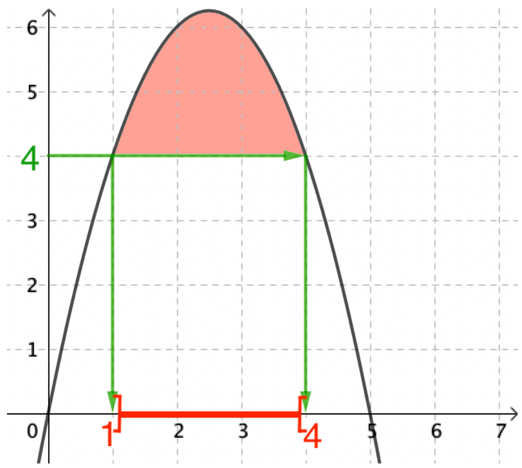
Méthode : Résoudre graphiquement une inéquation

Vidéo https://youtu.be/3_6LcpumUh4

Dans la méthode précédente, on a représenté la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.
Résoudre graphiquement l'inéquation $5x - x^2 > 4$.

Correction
L'inéquation $5x - x^2 > 4$ peut s'écrire $f(x) > 4$.
Ce qui revient à déterminer les points de la courbe dont l'ordonnée est strictement supérieure à 4.
On lit les solutions correspondantes sur l'axe des abscisses :
x est strictement compris entre 1 et 4.

On peut noter : $S =]1\,;\,4[$.



Partie 4 : Variations d'une fonction

1) Taux de variation

Définition :
Le **taux de variation** de la fonction f entre a et b est le nombre : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Propriété : Le taux de variation de f entre a et b est la pente de la droite passant par les points d'abscisses a et b de la courbe de f.

Méthode : Déterminer un taux de variation d'une fonction

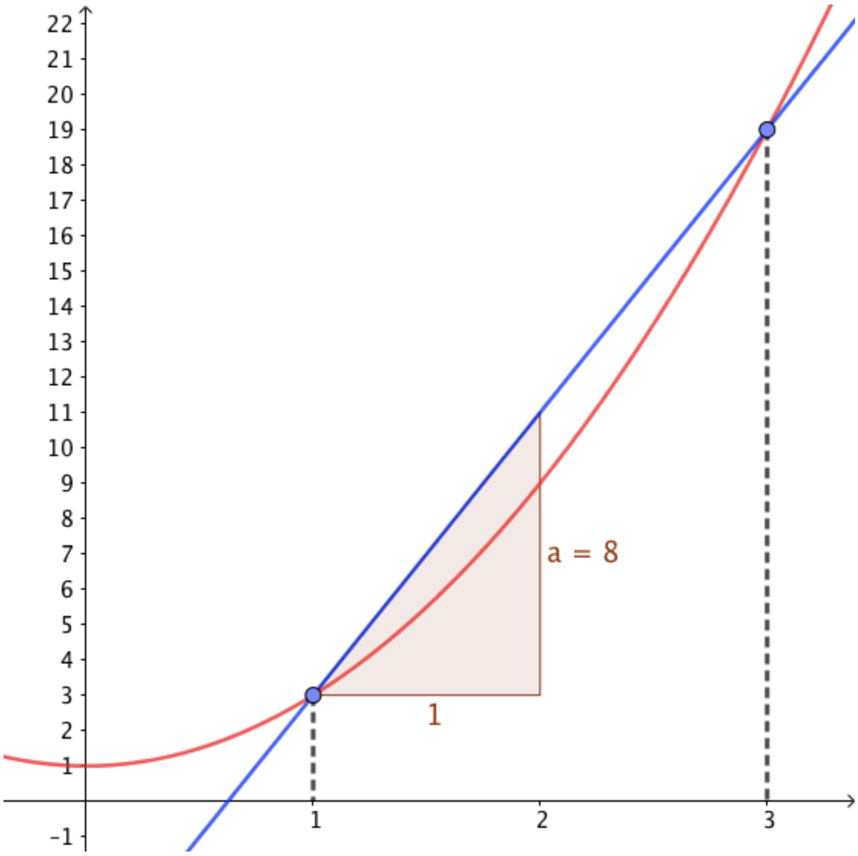
Vidéo https://youtu.be/xd0zEwVOmHE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + 1$.
a) Déterminer le taux de variation entre 1 et 3.
b) Interpréter géométriquement ce taux de variation.

Correction
a) Si $f(x) = 2x^2 + 1$, alors le taux de variation de f entre 1 et 3 est égal à :

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{2\times 3^2+1-(2\times 1^2+1)}{2}=\frac{19-3}{2}=8$$

b) Le taux de variation de f entre 1 et 3 est égal à 8 donc la pente de la droite passant par les points d'abscisses 1 et 3 est égale à 8.



2) Fonctions monotones

Définition : On dit qu'une fonction f est **monotone** sur un intervalle I, si f est :
- soit croissante sur I,
- soit décroissante sur I,
- soit constante sur I.

Propriétés :
- Si le taux de variation d'une fonction f entre deux nombres quelconques d'un intervalle I est positif, alors f est strictement croissante sur I.
- S'il est négatif, f est strictement décroissante sur I.
- S'il est nul, f est constante sur I.

Méthode : Étudier les variations d'une fonction à l'aide du taux de variation

Vidéo https://youtu.be/tqtZeVVJ3YU

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=5x-3$.
Démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Correction
On considère deux nombres quelconques distincts a et b.
Le taux de variation de f entre a et b est égal à :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{5b-3-(5a-3)}{b-a}=\frac{5b-5a}{b-a}=\frac{5(b-a)}{b-a}=5$$

Or, 5 > 0 donc $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$ et donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.