FONCTION EXPONENTIELLE

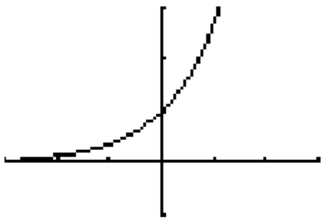
Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/aD03wqgxexk

I. Définition de la fonction exponentielle

Propriété et définition : Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction s'appelle **fonction exponentielle** et se note $\mathbf{exp}$.

Conséquence : $\exp(0) = 1$

Avec la calculatrice, il est possible d'observer l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle :



Remarque : On verra dans le paragraphe II. que la fonction exponentielle est croissante. Mais sa croissance est très rapide, ainsi exp(21) dépasse le milliard.
Pour des valeurs de x de plus en plus grandes, la fonction exponentielle prend des valeurs de plus en plus grandes.

Propriété : La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

II. Étude de la fonction exponentielle

1) Dérivabilité

Propriété : La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\exp x)' = \exp x$

2) Variations

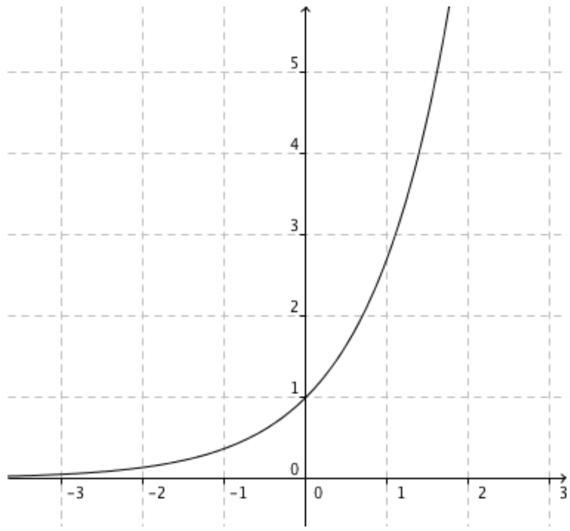
Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En effet, $(\exp x)' > 0$ car $(\exp x)' = \exp x > 0$.

3) Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	$+\infty$
$(\exp x)'$	+	
$\exp x$	0 ↗	$+\infty$



III. Propriété de la fonction exponentielle

1) Relation fonctionnelle

Théorème : Pour tous réels x et y, on a : $\exp(x+y) = \exp x \exp y$

Remarque : Cette formule permet de transformer une somme en produit et réciproquement.

Corollaires : Pour tous réels x et y, on a :

a) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$ ou encore $\exp x \exp(-x) = 1$

b) $\exp(x-y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$

c) $\exp(nx) = (\exp x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

Démonstration du a et b :

a) $\exp x \exp(-x) = \exp(x-x) = \exp 0 = 1$

b) $\exp(x-y) = \exp\big(x+(-y)\big)$

$= \exp x \exp(-y) = \exp x \dfrac{1}{\exp y} = \dfrac{\exp x}{\exp y}$

2) Le nombre e

Définition : L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e.
On a ainsi $\exp 1 = e$

Remarque : Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e.

e^1

2.718281828

<u>Notation nouvelle :</u>
$\exp x = \exp(x \times 1) = (\exp 1)^x = e^x$

On note pour tout x réel, $\exp x = e^x$

Comme π, le nombre e est un nombre irrationnel, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique. Ses premières décimales sont :
$e \approx$ 2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995 9574966967 6277240766 3035354759 4571382178 5251664274…
Le nombre e est également un nombre transcendant. On dit qu'un nombre est transcendant s'il n'est solution d'aucune équation à coefficients entiers.
Le nombre $\sqrt{2}$ par exemple, est irrationnel mais n'est pas transcendant puisqu'il est solution de l'équation $x^2 = 2$. Un tel nombre est dit «algébrique».

Le premier à s'intéresser de façon sérieuse au nombre e est le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783), ci-dessus. C'est à lui que nous devons le nom de ce nombre. Non pas qu'il s'agisse de l'initiale de son nom mais peut être car e est la première lettre du mot exponentielle.

Dans *« Introductio in Analysin infinitorum »* publié en 1748, *Euler* explique que :
$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$
Rappelons que par exemple 5! se lit "factorielle 5" et est égal à 1 x 2 x 3 x 4 x 5.
Par cette formule, il obtient une estimation de e avec 18 décimales exactes.
Nous devons aussi à Euler la démonstration de l'irrationalité de e.

Avec cette nouvelle notation, on peut ainsi résumer l'ensemble des propriétés de la fonction exponentielle :

<u>Propriétés :</u> Pour tous réels x et y, on a :
a) $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
b) $e^x > 0$ et $(e^x)' = e^x$
c) $e^{x+y} = e^x e^y$ $\quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ $\quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ $\quad (e^x)^n = e^{nx}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

<u>Méthode :</u> Dériver une fonction exponentielle

Vidéo https://youtu.be/XcMePHk6Ilk

Dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4x - 3e^x$ $\quad$ b) $g(x) = (x-1)e^x$ $\quad$ c) $h(x) = \frac{e^x}{x}$

a) $f'(x) = 4 - 3e^x$ $\quad$ b) $g'(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x = e^x + xe^x - e^x = xe^x$

c) $h'(x) = \dfrac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

Méthode : Simplifier les écritures

Vidéo https://youtu.be/qDFjeFyA_OY

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A = \dfrac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$ $\quad B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$ $\quad C = \dfrac{1}{(e^{-3})^2} + \dfrac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$ $\quad D = \dfrac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}}$

$A = \dfrac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$

$= \dfrac{e^{7-4}}{e^{-5}}$

$= \dfrac{e^3}{e^{-5}}$

$= e^{3-(-5)}$

$= e^8$

$B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$

$= e^{5\times(-6)} \times e^{-3}$

$= e^{-30} \times e^{-3}$

$= e^{-30-3}$

$= e^{-33}$

$C = \dfrac{1}{(e^{-3})^2} + \dfrac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$

$= \dfrac{1}{e^{-3\times 2}} + \dfrac{e^{4\times(-1)}}{e^{2-6}}$

$= \dfrac{1}{e^{-6}} + \dfrac{e^{-4}}{e^{-4}}$

$= e^6 + 1$

$D = \dfrac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}}$

$= \dfrac{e^{2x\times 3}}{e^{3x+1-x-1}}$

$= \dfrac{e^{6x}}{e^{2x}}$

$= e^{6x-2x}$

$= e^{4x}$

Propriétés : Pour tous réels a et b, on a :
a) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
b) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

Vidéo https://youtu.be/dA73-HT-I_Y
Vidéo https://youtu.be/d28Fb-zBe4Y

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

a) $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$
$\Leftrightarrow e^{x^2-3} = e^{-2x}$
$\Leftrightarrow x^2 - 3 = -2x$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$
$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$
Donc $x = \dfrac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1} = -3$ ou $x = \dfrac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1} = 1$
Les solutions sont –3 et 1.

b) $e^{4x-1} \geq 1$
$\Leftrightarrow e^{4x-1} \geq e^0$
$\Leftrightarrow 4x - 1 \geq 0$
$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$.

Méthode : Étudier une fonction exponentielle

Vidéo https://youtu.be/_MA1aW8ldjo

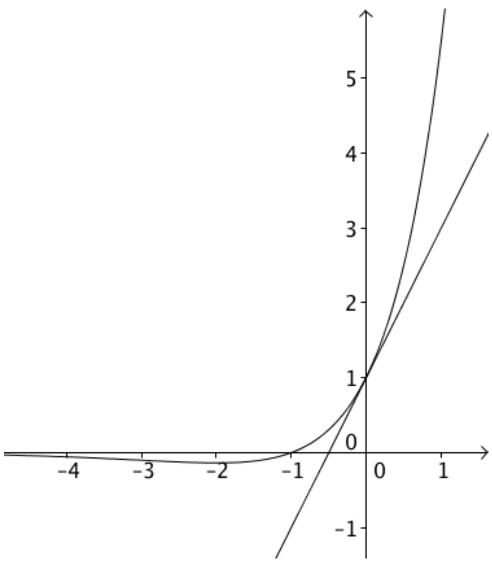
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^x$.
a) Calculer la dérivée de la fonction f.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
d) Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice.

a) $f'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$
b) Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x + 2$.
f est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -2]$ et croissante sur l'intervalle $[-2\ ;\ +\infty[$.
On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	

c) $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$
Une équation de la tangente à la courbe en 0 est donc : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$,
soit : $y = 2x + 1$

d)



IV. Exponentielle et suite géométrique

On a vu que pour tout entier n, et tout réel a, on a : $e^{na} = (e^a)^n$, ainsi :

Propriété : La suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison e^a.

On rappelle qu'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 a pour terme général : $u_n = u_0 q^n$.

Méthode : Déterminer une suite géométrique comprenant une exponentielle

Vidéo https://youtu.be/hKh-ry9AAO0

1) Dans chaque cas, déterminer la raison et le premier terme de la suite géométrique dont le terme général est :

a) $u_n = e^{4n}$ b) $u_n = 2e^{-3n}$ c) $u_n = -e^{\frac{n}{3}}$ d) $u_n = e^{2n-1}$

2) Déterminer le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de premier terme 3.

1) a) $u_n = e^{4n} = 1(e^4)^n$
(u_n) est une suite géométrique de raison e^4 et de premier terme 1.

b) $u_n = 2e^{-3n} = 2(e^{-3})^n$
(u_n) est une suite géométrique de raison e^{-3} et de premier terme 2.

c) $u_n = -e^{\frac{n}{3}} = (-1)\left(e^{\frac{1}{3}}\right)^n$
(u_n) est une suite géométrique de raison $e^{\frac{1}{3}}$ et de premier terme -1.

d) $u_n = e^{2n-1} = e^{2n}e^{-1} = e^{-1}(e^2)^n = \frac{1}{e}(e^2)^n$
(u_n) est une suite géométrique de raison e^2 et de premier terme $\frac{1}{e}$.

2) (u_n) est suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de premier terme 3, donc :
$u_n = 3\left(\frac{1}{e}\right)^n = 3(e^{-1})^n = 3e^{-n}$.

V. Fonctions de la forme $t \longmapsto e^{kt}$

1) Variations

Propriété :
La fonction $t \longmapsto e^{kt}$, avec $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est la fonction $t \longmapsto ke^{kt}$.

Démonstration :
On rappelle que la dérivée d'une fonction composée $t \longmapsto g(at+b)$ est $t \longmapsto ag'(at+b)$.
En considérant $g(t)=e^t$, $a=k$ et $b=0$, on a : $(e^{kt})'=ke^{kt}$.

Exemple :

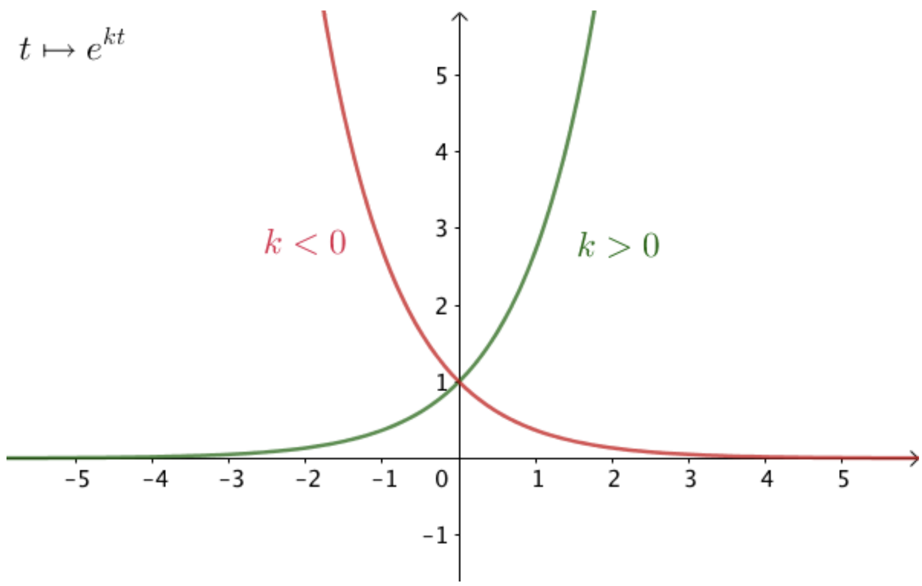
Vidéo https://youtu.be/RlyFEcx5Y3E

Soit $f(t)=e^{-4t}$ alors $f'(t)=-4e^{-4t}$.

Propriété :
Si k > 0 : la fonction $t \longmapsto e^{kt}$ est strictement croissante.
Si k < 0 : la fonction $t \longmapsto e^{kt}$ est strictement décroissante.

Démonstration :
On a : $(e^{kt})'=ke^{kt}$
Or, $e^{kt}>0$ pour tout réel t et tout entier relatif k non nul.
Donc le signe de la dérivée $t \longmapsto ke^{kt}$ dépend du signe de k.
Si k > 0 alors la dérivée est strictement positive est donc la fonction $t \longmapsto e^{kt}$ est strictement croissante.
Si k < 0 alors la dérivée est strictement négative est donc la fonction $t \longmapsto e^{kt}$ est strictement décroissante.

2) Représentation graphique



Méthode : Étudier une fonction $t \longmapsto e^{kt}$ dans une situation concrète

Vidéo https://youtu.be/IsLQwiB9Nrg

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur [0 ; 10] et telle que $f'(t)=0{,}14f(t)$.

1) Montrer que la fonction f définie sur [0 ; 10] par $f(t) = Ae^{0,14t}$ convient.
2) On suppose que $f(0) = 50000$. Déterminer A.
3) Déterminer les variations de f sur [0 ; 10].
4) a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
b) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé. Arrondir à l'heure près.

1) $f'(t) = A \times 0,14e^{0,14t} = 0,14 \times Ae^{0,14t} = 0,14f(t)$.
La fonction f définie sur [0 ; 10] par $f(t) = Ae^{0,14t}$ vérifient bien l'égalité $f'(t) = 0,14f(t)$ donc elle convient.

2) $f(0) = Ae^{0,14\times 0} = Ae^0 = A$.
Donc, si $f(0) = 50000$, on a : $A = 50000$.
Une expression de la fonction f est donc : $f(t) = 50000e^{0,14t}$.

3) Comme $k = 0,14 > 0$, on en déduit que la fonction $x \longmapsto e^{0,14t}$ est strictement croissante sur [0 ; 10]. Il en est de même pour la fonction f.

4) a) $f(3) = 50000e^{0,14\times 3} = 50000e^{0,42} \approx 76000$
$f(5,5) = 50000e^{0,14\times 5,5} = 50000e^{0,77} \approx 108000$

Après 3h, l'organisme contient environ 76 000 bactéries.
Après 5h30, l'organisme contient environ 108 000 bactéries.

b) Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100 000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.

X	Y1
4.89	99149
4.9	99288
4.91	99427
4.92	99566
4.93	99706
4.94	99845
4.95	99985
4.96	100125
4.97	100266
4.98	100406
4.99	100547

Divertissement :

$$e \approx \left(1+9^{-4^{6\times 7}}\right)^{3^{2^{85}}}$$

accurately the first
18.457.734.525.360.901.453.873.570
digits of e
while using every number from 1 to 9

Richard Sabey (2004)