INEQUATIONS

Tout le cours sur les inéquations en vidéo : https://youtu.be/kbTWwWQ9tYo

I. Tableaux de signes

1) Exemple d'introduction

a) Compléter le tableau de valeurs de l'expression $2x - 10$:

x	–10	–5	0	1	6	7	10	100
$2x - 10$								

b) Compléter alors la 2e ligne du tableau de signes de l'expression $2x - 10$:

x	$-\infty$		?		$+\infty$
$2x - 10$		…	0	…	

c) Pour quelle valeur x, l'expression $2x - 10$ s'annule-t-elle ?
Compléter alors la 1ère ligne du tableau de signes.

d) Vérifier à l'aide d'une calculatrice graphique.

a)

x	–10	–5	0	1	6	7	10	100
$2x - 10$	–30	–20	–10	–8	2	4	10	190

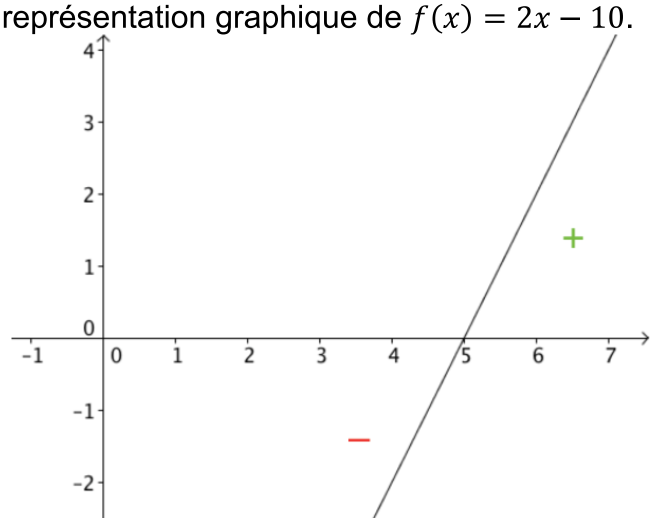
b)

x	$-\infty$		?		$+\infty$
$2x - 10$		–	0	+	

c) $2x - 10 = 0$ soit $2x = 10$ soit encore $x = 5$.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$2x - 10$		–	0	+	

d) On trace la représentation graphique de $f(x) = 2x - 10$.



2) Généralisation

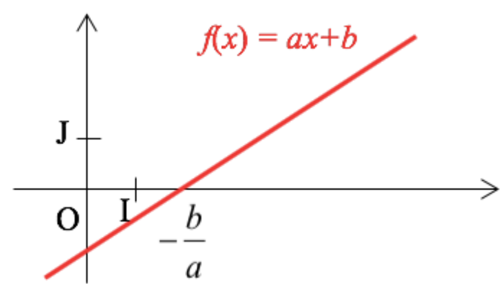
On considère a et b deux nombres fixés ($a \neq 0$) et x est un nombre réel.
Soit la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

Déterminons l'abscisse x du point d'intersection de la droite représentative de f dans un repère avec l'axe des abscisses :

Cela revient à résoudre l'équation : $f(x) = 0$,
soit : $ax + b = 0$,
soit : $ax = -b$,
soit encore $x = -\dfrac{b}{a}$.

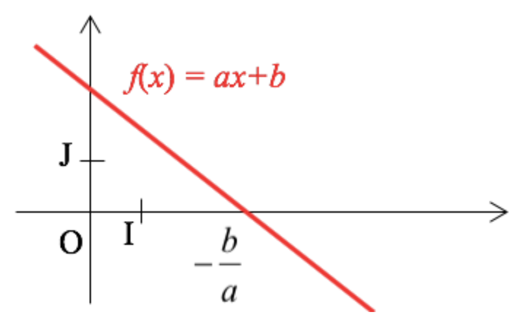
Si a > 0 :
La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
On obtient le tableau de signes suivant pour $ax+b$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	



Si a < 0 :
La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
On obtient le tableau de signes suivant pour $ax+b$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$-\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	



Méthode : Déterminer le signe d'une expression du type $ax + b$

Vidéo https://youtu.be/zZ9SbX8mC2o
Vidéo https://youtu.be/50CByVTP4ig

1) Déterminer le tableau de signes de l'expression $2x + 6$, où x est un nombre réel.
2) Déterminer le tableau de signes de l'expression $-3x + 12$, où x est un nombre réel.

1) Le coefficient en facteur de « x » est positif, donc on a le tableau :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$+2x+6$		$-$	0	$+$	

$2x + 6 = 0$ pour $x = -3$ ⇑

2) Le coefficient en facteur de « x » est négatif, donc on a le tableau :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$-3x+12$		$+$	0	$-$	

$-3x + 12 = 0$ pour $x = 4$ ⇑

II. Résolution d'inéquations

Une inéquation est une inégalité qui contient une inconnue x.
Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient cette inégalité. Il s'agit d'un ensemble de valeurs.

1. Inéquations du premier degré

Méthode : Résoudre une inéquation du premier degré

Vidéo https://youtu.be/ycYfb8aHssY

Résoudre les inéquations suivantes et représenter les solutions sur une droite graduée :

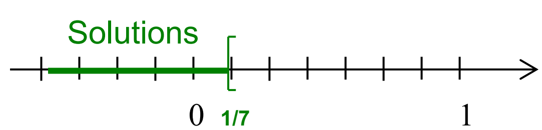
1) $2x + 3 < 4 - 5x$ 2) $2(x - 4) \leq 4x - 5$

1) $2x + 3 < 4 - 5x$

$2x + 5x < 4 - 3$

$7x < 1$

$x < \frac{1}{7}$



Les solutions sont tous les nombres strictement inférieurs à $\frac{1}{7}$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle : $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{7}\right[$.

2) $2(x-4) \leq 4x-5$

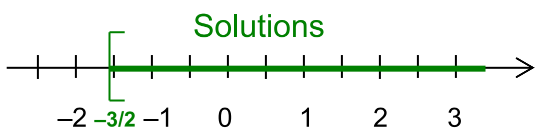
$2x-8 \leq 4x-5$

$2x-4x \leq 8-5$

$-2x \leq 3$

$x \geq -\frac{3}{2}$ On divise par un nombre négatif donc on change le sens de l'inégalité.

Les solutions sont tous les nombres supérieurs à $-\frac{3}{2}$.



L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle : $\left[-\frac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

2. <u>En étudiant le signe d'un produit</u>

<u>Méthode :</u> Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un produit

Vidéo https://youtu.be/qoNLr9NkvUE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(3-6x)(x+2)>0$

Le signe de $(3-6x)(x+2)$ dépend du signe de chaque facteur $3 - 6x$ et $x+2$.

$3 - 6x = 0$ ou $x + 2 = 0$

$6x = 3$ $x = -2$

$x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux facteurs.
En appliquant la règle des signes, on en déduit le signe du produit $(3-6x)(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3-6x$		+		+	0	-	
$x+2$		-	0	+		+	
$(3-6x)(x+2)$		-	0	+	0	-	

On en déduit que $(3-6x)(x+2)>0$ pour $x \in \left]-2\ ;\ \frac{1}{2}\right[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3-6x)(x+2)>0$ est $\left]-2\,;\,\frac{1}{2}\right[$.

3. En étudiant le signe d'un quotient

Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un quotient

Vidéo https://youtu.be/Vitm29q8AEs

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0$.

L'équation n'est pas définie pour $3x-2=0$, soit $x=\frac{2}{3}$.
Il faudra éventuellement exclure cette valeur de l'ensemble des solutions.

Le signe de $\frac{2-6x}{3x-2}$ dépend du signe des expressions $2-6x$ et $3x-2$.
$2-6x=0$ équivaut à $x=\frac{1}{3}$.

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux expressions.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$2-6x$		+	0	-		-	
$3x-2$		-		-	0	+	
$\frac{2-6x}{3x-2}$		-	0	+	||	-	

La double-barre dans le tableau signifie que le quotient n'est pas défini pour $x=\frac{2}{3}$.

On en déduit que $\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0$ pour $x \in \left]-\infty\,;\,\frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0$ est $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right[$..