

EQUATIONS, INEQUATIONS

- ▶ Tout le cours sur les équations en vidéo : <https://youtu.be/WoTpA2RyuVU>
- ▶ Tout le cours sur les inéquations en vidéo : <https://youtu.be/kbTWwWQ9tYo>

I. Résolution d'équations

1. Équation-produit

Définition : Toute équation du type $P(x) \times Q(x) = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques, est appelée **équation-produit**.

Remarque :

Nous rencontrerons plus particulièrement des équations-produits de la forme :
 $(ax + b)(cx + d) = 0$.

Propriétés :

- Dire qu'un produit de facteurs est nul, équivaut à dire que l'un au moins des facteurs est nul.
- Le cas particulier de l'équation-produit $(ax + b)(cx + d) = 0$ équivaut à $ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$.

Méthode : Résoudre une équation en se ramenant à une équation-produit

▶ Vidéo <https://youtu.be/EFgwA5f6-40>

▶ Vidéo <https://youtu.be/sMvrUMUES3s>

Résoudre dans \mathbb{R} les équations :

1) $(3x + 1)(1 - 6x) - (3x + 7)(3x + 1) = 0$

2) $5x^2 - 4x = 0$

1) On commence par factoriser l'expression pour se ramener à une équation-produit :

$$(3x + 1)(1 - 6x) - (3x + 7)(3x + 1) = 0$$

$$(3x + 1)[(1 - 6x) - (3x + 7)] = 0$$

$$(3x + 1)(1 - 6x - 3x - 7) = 0$$

$$(3x + 1)(-9x - 6) = 0$$

Soit : $3x + 1 = 0$ ou $-9x - 6 = 0$
 $3x = -1$ ou $-9x = 6$

$$x = -\frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}$$

Les solutions sont donc $-\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$.

$$2) 5x^2 - 4x = 0$$

$$x(5x - 4) = 0$$

$$\text{Soit : } x = 0 \quad \text{ou} \quad 5x - 4 = 0$$

$$5x = 4$$

$$x = \frac{4}{5}$$

Les solutions sont donc 0 et $\frac{4}{5}$.

2. Équation de la forme $x^2 = a$

Propriété :

Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $x^2 = a$ dépendent du signe de a .

Si $a < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.

Si $a = 0$, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.

Si $a > 0$, alors l'équation possède deux solutions qui sont \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$.

Démonstration :

- Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution car un carré est positif.
- Si $a = 0$, alors l'équation s'écrit $x^2 = 0$ donc $x = 0$.
- Si $a > 0$: $x^2 = a$ équivaut à : $x^2 - a = 0$

$$\text{Soit } (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$$

$$x - \sqrt{a} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{a} = 0$$

$$x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$$

Exemples :

Résoudre dans \mathbb{R} les équations : $x^2 = 16$, $x^2 = -8$ et $(x + 2)^2 = 9$.

- L'équation $x^2 = 16$.
16 est positif donc l'équation admet deux solutions $x = \sqrt{16} = 4$ et $x = -\sqrt{16} = -4$.
- L'équation $x^2 = -8$.
-8 est négatif donc l'équation n'a pas de solution dans \mathbb{R} .

- L'équation $(x + 2)^2 = 9$.
On a alors $x + 2 = 3$ ou $x + 2 = -3$.
L'équation admet deux solutions $x = 3 - 2 = 1$ et $x = -3 - 2 = -5$.

3. Équation-quotient

Définition : Toute équation du type $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques (avec $Q(x) \neq 0$), est appelée **équation-quotient**.

Propriété : Pour tout x qui n'annule pas l'expression $Q(x)$, l'équation-quotient $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ équivaut à $P(x) = 0$.

Exemple :

L'équation « $\frac{x+2}{x+3} = 0$ » a pour solution $x = -2$.

Méthode : Résoudre une équation en se ramenant à une équation-quotient

 **Vidéo** <https://youtu.be/zhY1HD4oLHg>

 **Vidéo** <https://youtu.be/OtGN4HHwEek>

Résoudre dans \mathbb{R} les équations :

a) $\frac{3x+5}{x-1} = 0$ b) $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4} = 0$ c) $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$ d) $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$

a) L'équation n'est pas définie pour $x = 1$.

Pour $x \neq 1$, l'équation $\frac{3x+5}{x-1} = 0$ équivaut à : $3x + 5 = 0$.

D'où $x = -\frac{5}{3}$.

b) L'équation n'est pas définie pour $x = 4$.

Pour $x \neq 4$, l'équation $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4} = 0$ équivaut à : $(2x + 1)(x - 3) = 0$.

Soit : $2x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$.

Les solutions sont : $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 3$.

c) L'équation n'est pas définie pour $x = -3$.

Pour $x \neq -3$, l'équation $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$ équivaut à : $x^2 - 9 = 0$, soit $x^2 = 9$

Soit encore : $x = 3$ ou $x = -3$.

Comme $x \neq -3$, l'équation a pour unique solution : $x = 3$.

d) L'équation n'est pas définie pour $x = 2$ et $x = 3$.

Pour $x \neq 2$ et $x \neq 3$, l'équation $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$ équivaut à : $1 - \frac{x+3}{x-3} - \frac{2}{2-x} = 0$

On réduit au même dénominateur dans le but de se ramener à une équation-quotient :

$$\frac{(x-3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{(x+3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{2(x-3)}{(x-3)(2-x)} = 0$$

$$\frac{(x-3)(2-x) - (x+3)(2-x) - 2(x-3)}{(x-3)(2-x)} = 0$$

On développe et on réduit le numérateur :

$$\frac{2x - x^2 - 6 + 3x - 2x + x^2 - 6 + 3x - 2x + 6}{(x-3)(2-x)} = 0$$

$$\frac{4x - 6}{(x-3)(2-x)} = 0$$

Ce qui équivaut à $4x - 6 = 0$ et $(x - 3)(2 - x) \neq 0$

D'où $x = \frac{3}{2}$.

II. Tableaux de signes

1) Exemple d'introduction

a) Compléter le tableau de valeurs de l'expression $2x - 10$:

x	-10	-5	0	1	6	7	10	100
$2x - 10$								

b) Compléter alors la 2^e ligne du tableau de signes de l'expression $2x - 10$:

x	$-\infty$?		$+\infty$
$2x - 10$...	0	...	

c) Pour quelle valeur x , l'expression $2x - 10$ s'annule-t-elle ?
Compléter alors la 1^{ère} ligne du tableau de signes.

d) Vérifier à l'aide d'une calculatrice graphique.

a)

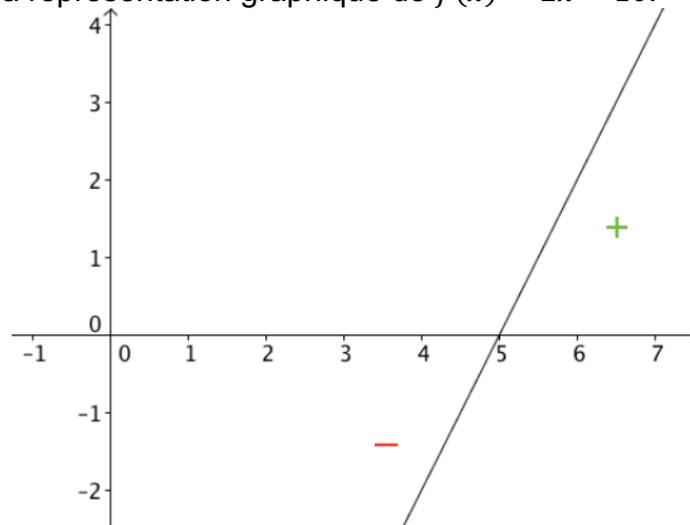
x	-10	-5	0	1	6	7	10	100
$2x - 10$	-30	-20	-10	-8	2	4	10	190

b)

x	$-\infty$?		$+\infty$
$2x - 10$		-	0	+	

c) $2x - 10 = 0$ soit $2x = 10$ soit encore $x = 5$.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$2x - 10$		-	0	+	

d) On trace la représentation graphique de $f(x) = 2x - 10$.

2) Généralisation

On considère a et b deux nombres fixés ($a \neq 0$) et x est un nombre réel.

Soit la fonction affine f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$.

Déterminons l'abscisse x du point d'intersection de la droite représentative de f dans un repère avec l'axe des abscisses :

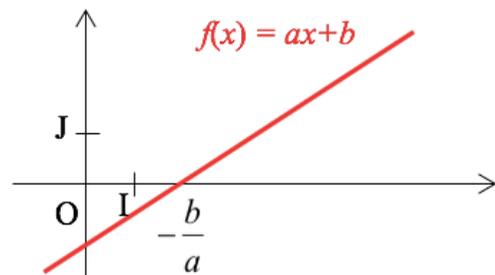
Cela revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$,
 soit : $ax + b = 0$,
 soit : $ax = -b$,
 soit encore $x = -\frac{b}{a}$.

Si $a > 0$:

La fonction f est croissante sur \mathbb{R} .

On obtient le tableau de signes suivant pour $ax + b$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	-	0	+

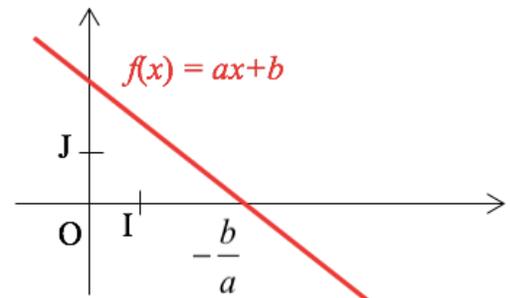


Si $a < 0$:

La fonction f est décroissante sur \mathbb{R} .

On obtient le tableau de signes suivant pour $ax+b$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	+	0	-



Méthode : Déterminer le signe d'une expression du type $ax + b$

📺 Vidéo <https://youtu.be/50CByVTP4iq>

- Déterminer le tableau de signes de l'expression $2x + 6$, où x est un nombre réel.
- Déterminer le tableau de signes de l'expression $-3x + 12$, où x est un nombre réel.

1) Le coefficient en facteur de « x » est **positif**, donc on a le tableau :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$	
$+2x + 6$		-	0	+

$$2x + 6 = 0 \text{ pour } x = -3 \quad \uparrow$$

2) Le coefficient en facteur de « x » est **négalif**, donc on a le tableau :

x	$-\infty$	4	$+\infty$	
$-3x + 12$		+	0	-

$$-3x + 12 = 0 \text{ pour } x = 4 \quad \uparrow$$

III. Résolution d'inéquations

Une inéquation est une inégalité qui contient une inconnue x .

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient cette inégalité. Il s'agit d'un ensemble de valeurs.

1. Inéquations du premier degré

Méthode : Résoudre une inéquation du premier degré

Vidéo <https://youtu.be/ycYfb8aHssY>

Résoudre les inéquations suivantes et représenter les solutions sur une droite graduée :

1) $2x + 3 < 4 - 5x$

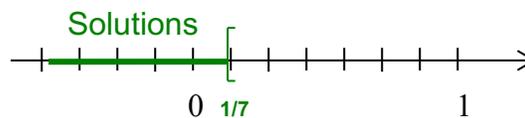
2) $2(x - 4) \leq 4x - 5$

1) $2x + 3 < 4 - 5x$

$$2x + 5x < 4 - 3$$

$$7x < 1$$

$$x < \frac{1}{7}$$



Les solutions sont tous les nombres strictement inférieurs à $\frac{1}{7}$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle : $]-\infty ; \frac{1}{7}[$.

2) $2(x - 4) \leq 4x - 5$

$$2x - 8 \leq 4x - 5$$

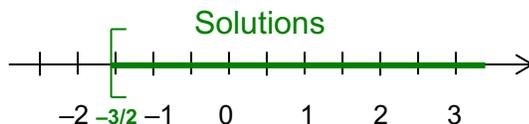
$$2x - 4x \leq 8 - 5$$

$$-2x \leq 3$$

$$x \geq -\frac{3}{2}$$

On divise par un nombre négatif donc on change le sens de l'inégalité.

Les solutions sont tous les nombres supérieurs à $-\frac{3}{2}$.



L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle : $[-\frac{3}{2} ; +\infty[$.

2. En étudiant le signe d'un produit

Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un produit

 Vidéo <https://youtu.be/qoNLR9NkvUE>

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation suivante : $(3 - 6x)(x + 2) > 0$

Le signe de $(3 - 6x)(x + 2)$ dépend du signe de chaque facteur $3 - 6x$ et $x + 2$.

$$\begin{aligned} 3 - 6x &= 0 & \text{ou} & & x + 2 &= 0 \\ 6x &= 3 & & & x &= -2 \\ x &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} & & & & \end{aligned}$$

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux facteurs. En appliquant la règle des signes, on en déduit le signe du produit $(3 - 6x)(x + 2)$.

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$3 - 6x$		+	+	0	-
$x + 2$	-	0	+		+
$(3 - 6x)(x + 2)$	-	0	+	0	-

On en déduit que $(3 - 6x)(x + 2) > 0$ pour $x \in]-2; \frac{1}{2}[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3 - 6x)(x + 2) > 0$ est $]-2; \frac{1}{2}[$.

3. En étudiant le signe d'un quotient

Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un quotient

 Vidéo <https://youtu.be/Vitm29q8AEs>

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation suivante : $\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0$.

L'équation n'est pas définie pour $3x - 2 = 0$, soit $x = \frac{2}{3}$.

Il faudra éventuellement exclure cette valeur de l'ensemble des solutions.

Le signe de $\frac{2-6x}{3x-2}$ dépend du signe des expressions $2 - 6x$ et $3x - 2$.

$$2 - 6x = 0 \text{ équivaut à } x = \frac{1}{3}.$$

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux expressions.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$2 - 6x$	+	0	-	-
$3x - 2$	-	-	0	+
$\frac{2 - 6x}{3x - 2}$	-	0		-

La double-barre dans le tableau signifie que le quotient n'est pas défini pour $x = \frac{2}{3}$.

On en déduit que $\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0$ pour $x \in]-\infty; \frac{1}{3}] \cup]\frac{2}{3}; +\infty[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0$ est $]-\infty; \frac{1}{3}] \cup]\frac{2}{3}; +\infty[$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales