

SYSTEMES D'EQUATIONS ET DROITES

▶ Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/sWaHnxqUve0>

I. Méthodes de résolution

1) Méthode de substitution

Méthode : Résoudre un système d'équations par la méthode de substitution

▶ Vidéo <https://youtu.be/24VsDZK6bN0>

▶ Vidéo <https://youtu.be/tzOCBkFZqUI>

Dans une boulangerie, Fabien achète 3 pains au chocolat et 2 croissants. Il paie 5,60 €. Dans la même boulangerie, Bob achète 1 pain au chocolat et 3 croissants. Il paie 4,20 €. Calculer le prix d'un pain au chocolat et d'un croissant.

Choix des inconnues :

x le prix d'un pain au chocolat

y le prix d'un croissant.

Mise en équations :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5,60 \\ x + 3y = 4,20 \end{cases}$$



Résolution du système d'équations :

A noter : Ici, la méthode de substitution se prête bien à la résolution du système car une équation contient une inconnue facile à isoler : x dans la 2^e équation

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5,60 \\ x + 3y = 4,20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5,60 \\ x = 4,20 - 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(4,20 - 3y) + 2y = 5,60 \\ x = 4,20 - 3y \end{cases}$$

On **substitue** l'inconnue isolée x dans la 1^{ère} équation.

$$\begin{cases} 12,60 - 9y + 2y = 5,60 \\ x = 4,20 - 3y \end{cases}$$

On **résout** la 1^{ère} équation pour trouver y .

$$\begin{cases} -7y = -7 \\ x = 4,20 - 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 4,20 - 3 \times 1 \end{cases} \quad \text{L'inconnue } y \text{ étant trouvée, on la substitue dans la 2}^{\text{e}}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 1,20 \end{cases} \quad \text{On calcule la valeur de } x.$$

On note : $S = \{(1,20 ; 1)\}$

Conclusion :

Le prix d'un pain au chocolat est de 1,20 € et le prix d'un croissant est de 1 €.

2) Méthode des combinaisons linéaires

Méthode : Résoudre un système d'équations par la méthode des combinaisons linéaires

 Vidéo <https://youtu.be/UPlz65G4f48>

 Vidéo https://youtu.be/V3yn_oEdqxc

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$

A noter : Ici, la méthode de substitution ne se prête pas à la résolution du système car en isolant une inconnue, on ramène les équations à des coefficients rationnels. Ce qui compliquerait considérablement les calculs.

On multiplie la première équation par 5 et la deuxième équation par 3 dans le but d'éliminer une inconnue par soustraction ou addition des deux équations.

$$\begin{array}{l} \times 5 \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases} \\ \times 3 \end{array}$$

On soustrait les deux premières équations. Ici, on élimine l'inconnue x .

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 15x - 10y = 25 \\ - \begin{cases} 15x + 9y = 6 \end{cases} \\ \hline 15x - 15x - 10y - 9y = 25 - 6 \end{cases} \end{array}$$

On résout l'équation obtenue pour trouver l'inconnue y .

$$\begin{array}{l} -19y = 19 \\ y = -1 \end{array}$$

On substitue dans une des équations du système la valeur ainsi trouvée pour y et on calcule la valeur de l'autre inconnue.

$$\begin{array}{l} 3x - 2 \times (-1) = 5 \\ 3x + 2 = 5 \\ 3x = 5 - 2 \end{array}$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

On note : $S = \{(1 ; -1)\}$

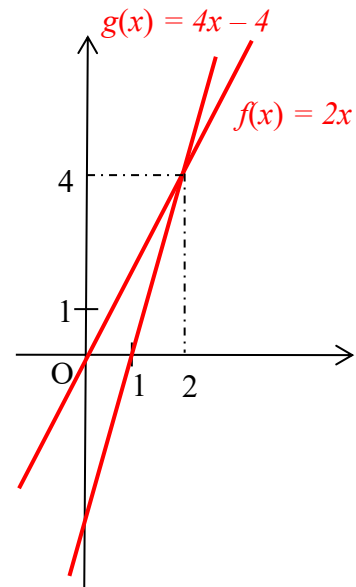
II. Interprétation graphique

📺 Vidéo https://youtu.be/-LV_5rkW0RY

1) Droites et systèmes

On considère le système :
$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 4x - y = 4 \end{cases}$$

Le système (S) équivaut à
$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4x - 4 \end{cases}$$



On désigne par (d) et (d') les droites représentant les fonctions respectives : $f(x) = 2x$ et $g(x) = 4x - 4$.

La solution du système est donc le couple $(x ; y)$ coordonnées du point d'intersection des deux droites (d) et (d').

Par lecture graphique, on trouve le couple $(2 ; 4)$ comme solution du système.

Définition :

Soit a, b, a' et b' des nombres réels donnés.

Résoudre le système d'équations
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$
 c'est trouver tous les couples $(x ; y)$ de nombres réels vérifiant simultanément les deux équations du système.

Soit (S) le système d'équations :
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$
 où a, b, a' et b' sont des nombres réels donnés avec $b \neq 0$ et $b' \neq 0$.

Le système (S) équivaut à
$$\begin{cases} by = c - ax \\ b'y = -a'x + c' \end{cases}$$

Soit :

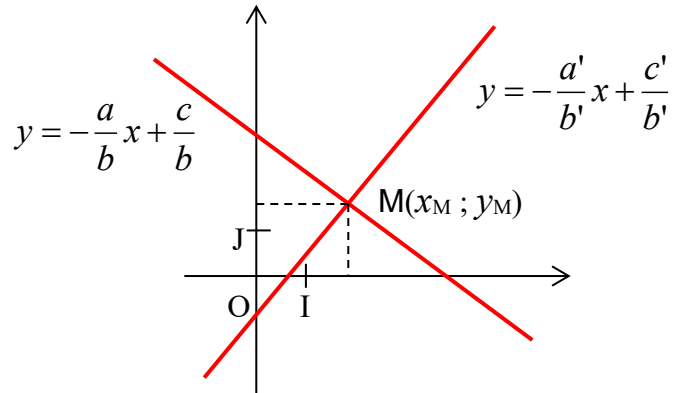
$$\begin{cases} y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \\ y = -\frac{a'}{b'}x + \frac{c'}{b'} \end{cases}$$

Si les coefficients directeurs des droites associées à ces deux équations sont différents alors elles possèdent un unique point d'intersection, soit :

$$-\frac{a}{b} \neq -\frac{a'}{b'}$$

Soit encore : $ab' \neq a'b$

Si M est le point d'intersection des deux droites, le couple de ses coordonnées $(x_M ; y_M)$ est solution du système.



2) Exemple d'un système n'admettant pas de solution

📺 Vidéo <https://youtu.be/IYzK0zVr-Lk>

$$\text{Soit (S) le système : } \begin{cases} -3x + y = 1 \\ 6x - 2y = 6 \end{cases}$$

Résolution du système :

En isolant y dans la première équation, on a : $y = 3x + 1$

En remplaçant y dans la deuxième équation, on a : $6x - 2(3x + 1) = 6$

Soit : $6x - 6x - 2 = 6$

Soit encore : $-2 = 6$. On a abouti à une contradiction.

Les deux équations du système (S) ne peuvent pas être vérifiées simultanément par un couple de nombres réels $(x ; y)$.

Le système (S) ne possède donc pas de solution.

Interprétation géométrique :

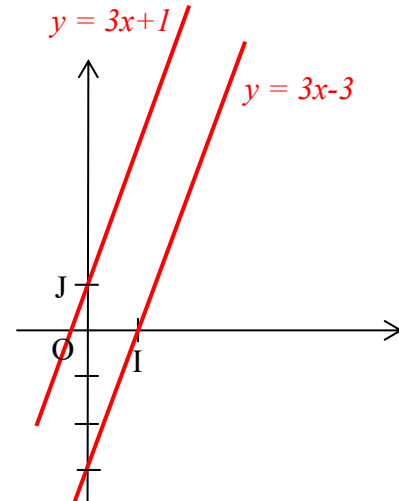
Le système (S) équivaut à $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ -2y = -6x + 6 \end{cases}$, soit :

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = \frac{-6}{-2}x + \frac{6}{-2} \end{cases}$$

$$\text{Soit encore : } \begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 3 \end{cases}$$

Les droites d'équations $y = 3x + 1$ et $y = 3x - 3$ possèdent des coefficients directeurs égaux, elles sont donc strictement parallèles.

Il n'existe pas de couple de nombres réels $(x ; y)$ vérifiant simultanément les équations des deux droites.



3) Exemple d'un système admettant une infinité de solutions

► Vidéo <https://youtu.be/IYzK0zVr-Lk>

$$\text{Soit (S) le système : } \begin{cases} -6x - 3y = -6 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

Résolution du système :

$$\text{Le système (S) équivaut à } \begin{cases} -3y = 6x - 6 \\ y = -2x + 2 \end{cases}, \text{ soit :}$$

$$\begin{cases} y = \frac{6}{-3}x - \frac{6}{-3} \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

$$\text{Soit encore : } \begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

Tous les couples de coordonnées $(x ; y)$ vérifiant l'équation $y = 2x + 2$ sont solutions du système (S).

Pour $x = 5$ par exemple, $y = -2 \times 5 + 2 = -8$. Le couple $(5 ; -8)$ est solution.

Il existe une infinité de couples de nombres réels $(x ; y)$ vérifiant l'équation $y = 2x + 2$.

Le système (S) possède donc une infinité de solutions.

Interprétation géométrique :

Les droites associées à ces deux équations sont confondues.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales

Yvan Monka – Académie de Strasbourg – www.maths-et-tiques.fr