SYSTÈMES D'ÉQUATIONS ET DROITES

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/sWaHnxqUve0

Exemple d'introduction :

Soit deux équations à deux inconnues x et y :

$$2x - y = 0 \text{ et } 3x - 4y = -5.$$

Elles forment ce qu'on appelle un **système** de deux équations à deux inconnues.

Et on note : $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$

Un couple de nombres qui vérifie les deux équations est appelé solution du système.
Ici, le coupe (1 ; 2) est solution. En effet :

$$\begin{cases} 2 \times 1 - 2 = 0 \\ 3 \times 1 - 4 \times 2 = -5 \end{cases}$$

Dans ce chapitre, on verra deux méthodes permettant de résoudre de tels systèmes.

Partie 1 : Méthode de substitution

Méthode : Résoudre un système d'équations par la méthode de substitution

Vidéo https://youtu.be/24VsDZK6bN0
Vidéo https://youtu.be/tzOCBkFZgUI

Résoudre le système d'équations par la méthode de substitution : $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 4y = 14 \end{cases}$

Correction :

$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 4y = 14 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$ On isole facilement l'inconnue x dans la 2^{e} équation.

$\begin{cases} 3(14 + 4y) + 2y = 0 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$ On remplace x par $14 + 4y$ dans la 1re équation (substitution).

$\begin{cases} 42 + 12y + 2y = 0 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$ On résout la 1re équation pour trouver y.

$\begin{cases} 14y = -42 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$

$\begin{cases} y = -\dfrac{42}{14} = -3 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$

$\begin{cases} y = -3 \\ x = 14 + 4 \times (-3) \end{cases}$ On remplace y par -3 dans la 2e équation.

$\begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$

La solution du système est le couple $(2\,;-3)$ et on note : $S = \{(2\,;-3)\}$

Partie 2 : Méthode des combinaisons linéaires

Méthode : Résoudre un système d'équations par la méthode des combinaisons linéaires

Vidéo https://youtu.be/Zw-qI9DFv54
Vidéo https://youtu.be/UPIz65G4f48
Vidéo https://youtu.be/V3yn_oEdgxc

Résoudre les systèmes d'équations par la méthode des combinaisons linéaires :

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases}$

Correction

Remarque : Ici, la méthode de substitution ne se prête pas à la résolution du système car en isolant une inconnue, on ferait apparaitre des fractions. Ce qui complique les calculs.

a) • $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$ $\times\,\mathbf{2}$ On multiplie la 1re équation par 2…

$\begin{cases} 6x - 4y = 22 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$ … pour obtenir le même coefficient devant une des inconnues.

•
$$-\begin{cases}6x-4y=22\\6x+3y=15\end{cases}$$
$$6x-6x-4y-3y=22-15$$
$$-4y-3y=22-15$$
$$-7y=7$$
$$y=\frac{7}{-7}$$
$$y=-1$$

On soustrait les deux équations pour éliminer x.

• $3x-2y=11$ On remplace y par -1 dans une des deux équations (au choix).
$3x-2\times(-1)=11$
$3x+2=11$ On résout l'équation pour trouver x.
$3x=11-2$
$3x=9$
$x=3$

La solution du système est le couple $(3\,;-1)$ et on note : $S=\{(3\,;\,-1)\}$

b) • $\begin{cases}3x-2y=7\\5x+3y=-1\end{cases}$

$\begin{cases}3x-2y=7 & \times 5\\5x+3y=-1 & \times 3\end{cases}$ On multiplie la 1re équation par 5, et la 2e équation par 3…

$\begin{cases}15x-10y=35\\15x+9y=-3\end{cases}$ … pour obtenir le même coefficient devant une des inconnues.

•
$$-\begin{cases}15x-10y=35\\15x+9y=-3\end{cases}$$
$$15x-15x-10y-9y=35+3$$
$$-10y-9y=35+3$$
$$-19y=38$$
$$y=\frac{38}{-19}$$
$$y=-2$$

On soustrait les deux équations pour éliminer x.

• $3x-2y=7$ On remplace y par -2 dans une des deux équations (au choix).
$3x-2\times(-2)=7$
$3x+4=7$
$3x=7-4$
$3x=3$
$x=1$

La solution du système est le couple $(1\,;-2)$ et on note : $S=\{(1\,;\,-2)\}$

Partie 3 : Résolutions graphiques

1) Système admettant une unique solution

Méthode : Résoudre graphiquement un système d'équations

Vidéo https://youtu.be/-LV_5rkW0RY

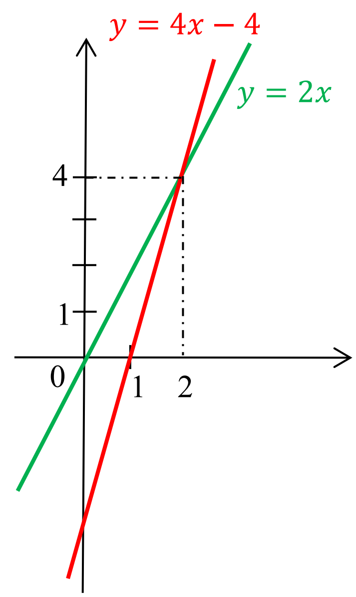
On considère le système d'équations : $\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 4x - y = 4 \end{cases}$

Déterminer graphiquement le couple solution.

Correction

Le système équivaut à : $\begin{cases} y = 2x \\ -y = -4x + 4 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4x - 4 \end{cases}$



$y = 2x$ et $y = 4x - 4$ sont les équations de deux droites qu'on représente dans un repère.
La solution du système est donc le couple $(x\,;\,y)$ coordonnées du **point d'intersection** des deux droites.

Par lecture graphique, on trouve le couple $(2\,;4)$ comme solution du système.

On note : $S = \{(2\,;4)\}$

2) Système n'admettant pas de solution

Méthode : Démontrer qu'un système ne possède pas de solution

Vidéo https://youtu.be/IYzK0zVr-Lk

On considère le système d'équations : $\begin{cases} -3x + y = 1 \\ 6x - 2y = 6 \end{cases}$

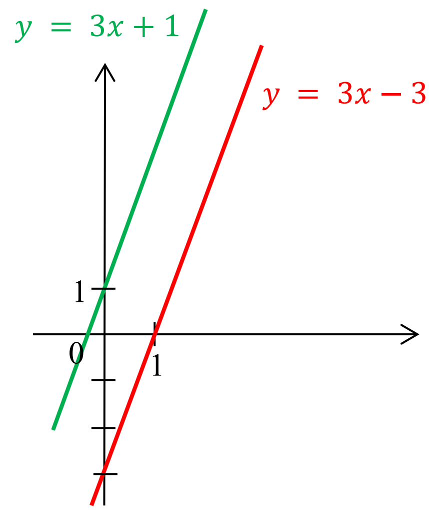
Démontrer que ce système n'admet pas de solution.

Correction

Le système équivaut à : $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ -2y = -6x + 6 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = \dfrac{-6x}{-2} + \dfrac{6}{-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 3 \end{cases}$$



Les droites d'équations $y = 3x + 1$ et $y = 3x - 3$ possèdent des coefficients directeurs égaux, elles sont donc parallèles, et même strictement parallèles.
Elles n'ont pas de point d'intersection, donc le système n'a pas de solution.
On note : $S = \emptyset$

3) Système admettant une infinité de solutions

Méthode : Démontrer qu'un système admet une infinité de solutions

Vidéo https://youtu.be/IYzK0zVr-Lk

Soit le système d'équations : $\begin{cases} -6x - 3y = -6 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

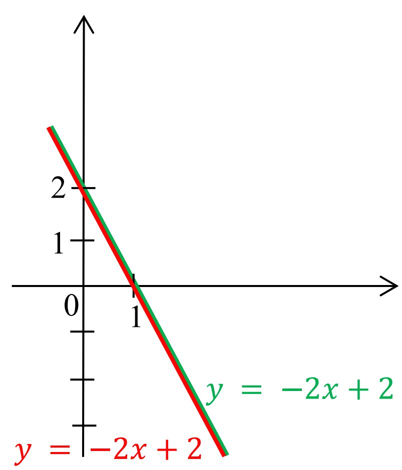
Démontrer que ce système admet une infinité de solutions.

Correction

Le système équivaut à : $\begin{cases} -3y = 6x - 6 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = \dfrac{6}{-3}x - \dfrac{6}{-3} \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$



Les deux droites ont la même équation $y = -2x + 2$, elles sont donc confondues et possèdent une infinité de points d'intersection.
Le système admet donc une infinité de solutions : tous les couples $(x\,;\,y)$ vérifiant $y = -2x + 2$.