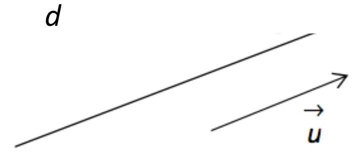
DROITES DU PLAN

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/d-rUnClmcCY

Partie 1 : Vecteur directeur et équation cartésienne d'une droite

1. Vecteur directeur

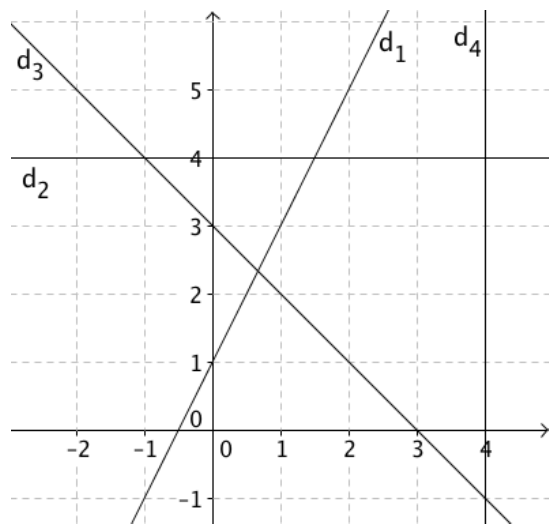
Définition :
d est une droite du plan.
On appelle **vecteur directeur** de d tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite d.



Méthode : Déterminer graphiquement un vecteur directeur d'une droite

Vidéo https://youtu.be/6VdSz-0QT4Y

Donner des vecteurs directeurs des droites d_1, d_2, d_3 et d_4.



Correction

- Pour d_1 :

On choisit un vecteur qui possède la même direction que la droite d_1.
Par exemple : $\vec{a}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ convient.
$\vec{b}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ ou $\vec{c}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ sont également des vecteurs directeurs de d_1.

- Pour d_2 : $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$ convient.
- Pour d_3 : $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ convient.
- Pour d_4 : $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ convient.

2. Équation cartésienne d'une droite

Définition :
Toute droite admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.
Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite.

Propriété : Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/GVDUrdsRUdA

Soit $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ un point de la droite d et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d.
Un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartient à la droite d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ sont colinéaires, soit $det(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u})=0$ soit encore $\begin{vmatrix}x-x_0 & \alpha\\y-y_0 & \beta\end{vmatrix}=0$.
Donc : $\beta(x-x_0)-\alpha(y-y_0)=0$
$\beta x-\beta x_0-\alpha y+\alpha y_0=0$
$\beta x-\alpha y+\alpha y_0-\beta x_0=0$
Cette équation peut s'écrire : $ax+by+c=0$ avec $a=\beta$ et $b=-\alpha$ et $c=\alpha y_0-\beta x_0$.
Les coordonnées de $\vec{u}$ sont donc $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Exemple : Un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $4x-5y-1=0$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$.
En effet, $a=4$ et $b=-5$ donc $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$.

Méthode : Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur

Vidéo https://youtu.be/NosYmlLLFB4
Vidéo https://youtu.be/i5WD8IZdEqk

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.
b) Déterminer une équation cartésienne de la droite d' passant par les points $B\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

Correction
a) d admet une équation cartésienne de la de la forme $ax+by+c=0$.

- Comme $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d, on a : $\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

Soit $a=5$ et $b=1$.
Une équation de d est donc de la forme $5x+1y+c=0$.

- Pour déterminer c, il suffit de substituer les coordonnées $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ de A dans l'équation :

$5 \times 3 + 1 \times 1 + c = 0$
$15 + 1 + c = 0$
$16 + c = 0$
$c = -16$

Une équation de d est donc $5x + 1y - 16 = 0$.

Remarque : Une autre méthode consiste à utiliser le déterminant :

Vidéo https://youtu.be/rLxQIbQkPsQ

b) ● B et C appartiennent à d' donc $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de d'.
On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1-5\\-3-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$. Donc $a = -6$ et $b = 4$.
Une équation cartésienne de d' est de la forme : $-6x + 4y + c = 0$.

- $B\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ appartient à d' donc : $-6 \times 5 + 4 \times 3 + c = 0$ donc $c = 18$.

Une équation cartésienne de d' est : $-6x + 4y + 18 = 0$ ou encore $-3x + 2y + 9 = 0$.

Méthode : Tracer une droite à partir de l'équation cartésienne

Vidéo https://youtu.be/EchUv2cGtzo

Tracer la droite d d'équation cartésienne $3x + 2y - 5 = 0$.

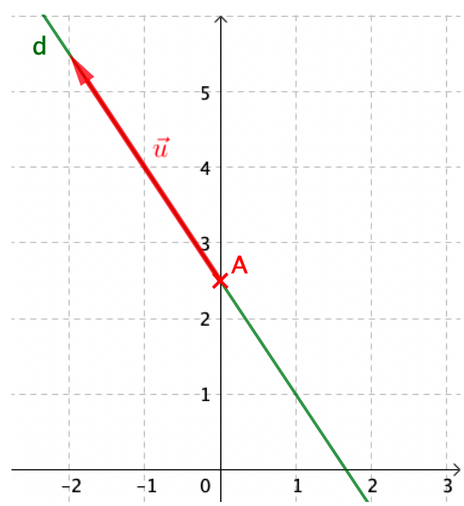
Correction
Pour tracer une droite, il suffit de connaître un point appartenant à la droite et un vecteur directeur.

- On choisit le point d'abscisse 0 :

Comme $x = 0$, on remplace x par 0 dans l'équation et on calcule la valeur de y correspondante :
$3 \times 0 + 2y - 5 = 0$
$2y = 5$
$y = \frac{5}{2} = 2{,}5$
Le point A de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\2{,}5\end{pmatrix}$ appartient à la droite d.

- $a = 3$ et $b = 2$ donc $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.



On trace la droite d passant par le point $A\begin{pmatrix}0\\2{,}5\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

3. Position relative de deux droites

Propriété :
Dire que deux droites sont parallèles équivaut à dire qu'elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Méthode : Déterminer la position relative des deux droites

Vidéo https://youtu.be/NjsVdVolhvU

Démontrer que les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $6x - 10y - 5 = 0$ et $-9x + 15y = 0$ sont parallèles.

Correction
Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}10\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d_1.
Le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-15\\-9\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d_2.
Calculons $det(\vec{u}\,;\vec{v})$:

$$det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix}10 & -15\\ 6 & -9\end{vmatrix} = 10 \times (-9) - 6 \times (-15) = 0$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et donc les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

Partie 2 : Équation réduite et pente d'une droite

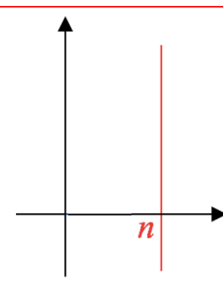
1. Équation réduite

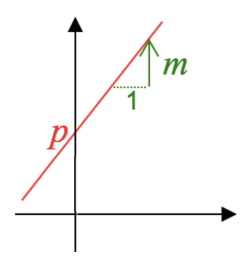
Exemple : Soit d dont une droite d'**équation cartésienne** $4x + y - 6 = 0$.
On a alors : $4x + y = 6$
$y = -4x + 6$
Cette équation est appelée l'**équation réduite** de la droite d.

Propriété :
Soit une droite d.

- Si d est parallèle à l'axe des ordonnées :
alors l'équation de d est de la forme $x = n$.

- Si d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées :
alors l'équation de d est de la forme $y = mx + p$.
Cette équation est appelée **équation réduite** de la droite d.





Démonstration :

- Si $b \neq 0$, alors l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite d peut être ramenée à une équation réduite $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Et on note $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$.
- Si $b = 0$, alors l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite d peut être ramenée à l'équation $x = -\frac{c}{a}$. Dans ce cas, la droite d est parallèle à l'axe des ordonnées.

Exemples :

- L'équation $y = -4x + 6$ est l'équation réduite d'une droite avec :
  $m = -4$ et $p = 6$.
- L'équation $x = 5$ est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées avec :
  $n = 5$.

Méthode : Passer d'une équation cartésienne à l'équation réduite et réciproquement

Vidéo https://youtu.be/XA0YajthETQ

a) Soit la droite d d'équation cartésienne $6x + 3y - 5 = 0$. Déterminer l'équation réduite de d.
b) Soit la droite d' d'équation réduite $y = 6x - 5$. Déterminer une équation catésienne de d'.

Correction

a) On veut exprimer l'équation sous la forme $y = ax + b$. Il s'agit donc d'isoler y dans l'équation.

$6x + 3y - 5 = 0$

$3y = -6x + 5$

$y = \frac{-6x + 5}{3}$

$y = -2x + \frac{5}{3}$: équation réduite de d.

b) On veut exprimer l'équation sous la forme $ax + by + c = 0$. Il s'agit donc de ramener tous les termes de l'équation dans le membre de gauche.

$y = 6x - 5$

$-6x + y + 5 = 0$: équation cartésienne de d'.

Vocabulaire : - m est appelé la **pente** ou le **coefficient directeur** de la droite d.
- p est appelé l'**ordonnée à l'origine** de la droite d.

Remarque : Dans l'équation réduite, on retrouve l'expression d'une fonction affine.

Exercice :

Donner la pente (coefficient directeur) et l'ordonnée à l'origine de chacune des droites d'équations : a) $y = -2x + 3$ b) $y = 5$ c) $4x + 2y = 1$

Réponses

a) Pente : -2
Ordonnée à l'origine : 3

b) Pente : 0
Ordonnée à l'origine : 5

c) L'équation peut s'écrire sous sa forme réduite : $y = -2x + \frac{1}{2}$
Pente : -2
Ordonnée à l'origine : $\frac{1}{2}$

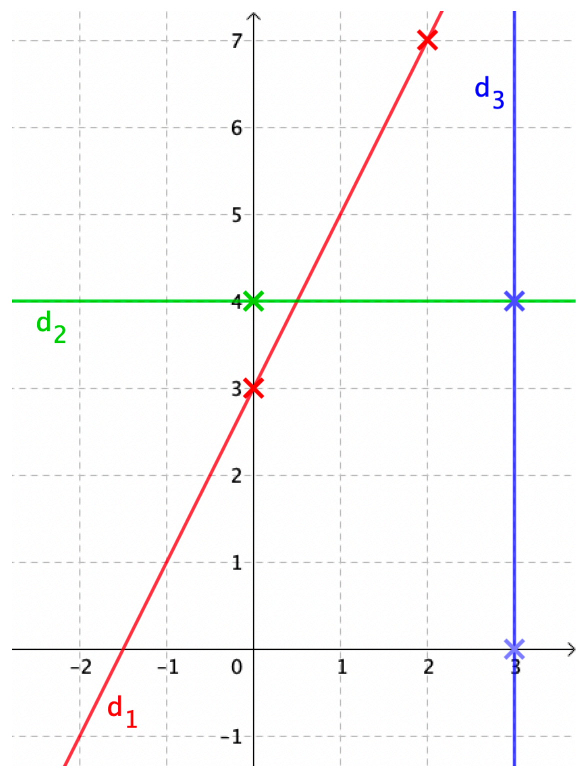
Méthode : Représenter graphiquement une droite d'équation réduite donnée

Vidéo https://youtu.be/cUdhxkaTqqk

Dans un repère, tracer les droites d_1 , d_2 et d_3 d'équations respectives :
$y = 2x + 3$, $y = 4$, $x = 3$.

Correction

● - La droite d_1 d'équation $y = 2x + 3$ a pour ordonnée à l'origine 3. Donc le point de coordonnée $\binom{0}{3}$ appartient à la droite d_1.
- On choisit le point d'abscisse 2 :
Comme $x = 2$, on remplace x par 2 dans l'équation et on calcule la valeur de y correspondante :
$y = 2 \times 2 + 3 = 7$.
Le point de coordonnées $\binom{2}{7}$ appartient à d_1.
On peut ainsi tracer la droite d_1 passant par ces deux points.



● La droite d_2 d'équation $y = 4$ est l'ensemble des points dont l'ordonnée est égale à 4. La droite d_2 est donc la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par le point de coordonnées $\binom{0}{4}$.

● La droite d_3 d'équation $x = 3$ est l'ensemble des points dont l'abscisse est égale à 3. La droite d_3 est donc la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de coordonnées $\binom{3}{0}$.

Méthode : Vérifier si un point appartient à une droite d'équation donnée

Vidéo https://youtu.be/XA0YajthETQ

Les points $A\binom{6}{39}$ et $B\binom{346}{2420}$ appartiennent-ils à la droite d d'équation $y = 7x - 3$?

Correction

- Dire que le point $A\binom{6}{39}$ appartient à la droite d d'équation $y = 7x - 3$ revient à dire que

les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite d.
Ce qui est le cas, puisque $y = 7 \times 6 - 3 = 39$.
Le point A appartient donc à la droite d.

- Les coordonnées de $B\binom{346}{2420}$ ne vérifient pas l'équation de la droite d.

En effet : $7 \times 346 - 3 = 2419 \neq 2420$ donc le point B n'appartient pas à la droite d.

Remarque : Pour démontrer que 3 points A, B et C sont alignés, il suffit de montrer par exemple que le point A vérifie l'équation de la droite (BC).

2. Pente d'une droite

Propriété : Si $A\binom{x_A}{y_A}$ et $B\binom{x_B}{y_B}$ sont deux points distincts d'une droite tel que $x_A \neq x_B$ alors la droite a pour pente (ou coefficient directeur) $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Méthode : Déterminer une équation réduite de droite dont on connaît deux points

Vidéo https://youtu.be/tfagLy6QRuw

Soit $A\binom{4}{-1}$ et $B\binom{3}{5}$ deux points d'une droite d. Déterminer une équation de la droite d.

Correction

L'équation réduite de la droite d est de la forme $y = mx + p$.

- La pente (coefficient directeur) de d est : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-(-1)}{3-4} = \frac{6}{-1} = -6$.

L'équation de d est donc de la forme : $y = -6x + p$.

- Comme $A\binom{4}{-1}$ appartient à la droite d, ses coordonnées vérifient l'équation de d.

Soit : $-1 = -6 \times 4 + p$.
D'où $p = -1 + 6 \times 4 = 23$.

L'équation réduite de d est donc : $y = -6x + 23$.

ALGORITHME

TP avec Python : Déterminer une équation de droite passant par deux points donnés
https://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo_EqDroite.pdf

```
def droite(xA,yA,xB,yB):
    m=...
    p=...
    print('y=',m,'x+',p)
```

3. Position relative de deux droites

Propriété : Soient deux droites d'équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.
Dire que les droites sont parallèles revient à dire que leurs pentes sont égales ($m = m'$).

Remarque : Lorsque les pentes sont différentes, les droites sont sécantes.

Exemple : Les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $y = 3x + 4$ et $y = 3x + 9$ sont parallèles car elles ont la même pente égale à 3.

Méthode : Déterminer la position relative de deux droites

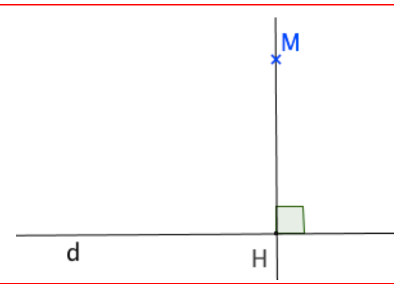
Vidéo https://youtu.be/gTUPGw7Bulc

Dans chaque cas, déterminer la position relative des deux droites :
a) $d_1 : y = -2x - 5$ et $d_2 : y = -2x + 4$
b) $d_3 : y = 2x + 1$ et $d_4 : y = -3x + 8$
c) $d_5 : y = -x + 7$ et $d_6 : y = 3$
d) $d_7 : x = 1$ et $d_8 : x = -8$

Correction
1) Les droites d_1 et d_2 sont parallèles car elles ont la même pente égale à -2.
2) Les droites d_3 et d_4 sont sécantes car elles ont des pentes différentes 2 et -3.
3) Les droites d_5 et d_6 sont sécantes car elles ont des pentes différentes -1 et 0.
4) Les droites d_7 et d_8 sont parallèles car elles sont parallèles à l'axe des ordonnées.

Partie 3 : Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition : Soit une droite d et un point M.
Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite d est le point d'intersection H de la droite d avec la perpendiculaire à d passant par M.

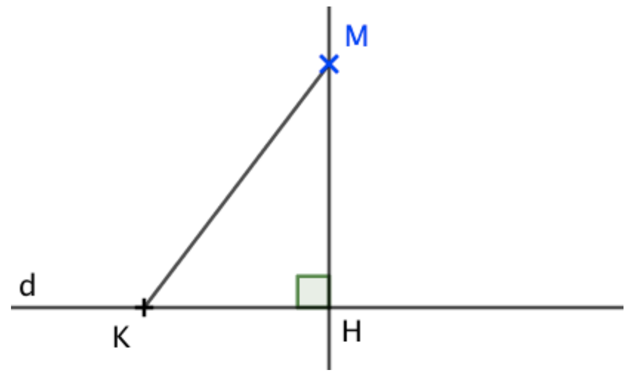


Propriété : Le projeté orthogonal du point M sur la droite d est le point de la droite d le plus proche du point M.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/DohZ0ehR_rw

Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite d.
Supposons qu'il existe un point K de la droite d plus proche de M que l'est le point H.

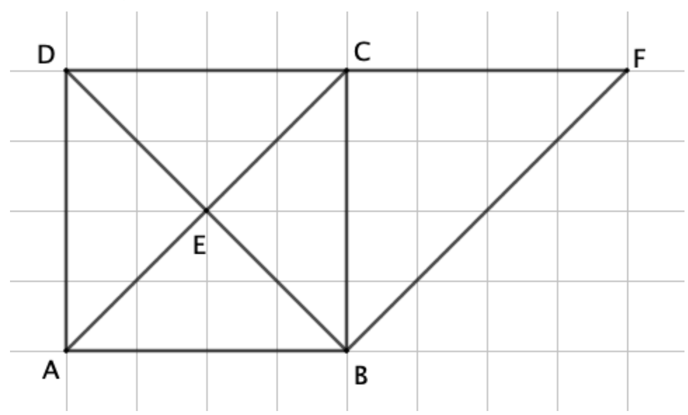


$KM \leq HM$ car K est le point de la droite le plus proche de M.
Donc $KM^2 \leq HM^2$.
Or, d'après l'égalité de Pythagore, on a : $HM^2 + HK^2 = KM^2$
Donc $HM^2 + HK^2 \leq HM^2$.
Donc $HK^2 \leq 0$. Ce qui est impossible sauf dans le cas où le point K est le point H.
On en déduit que H est le point de la droite d le plus proche du point M.

Méthode : Reconnaitre et construire un projeté orthogonal

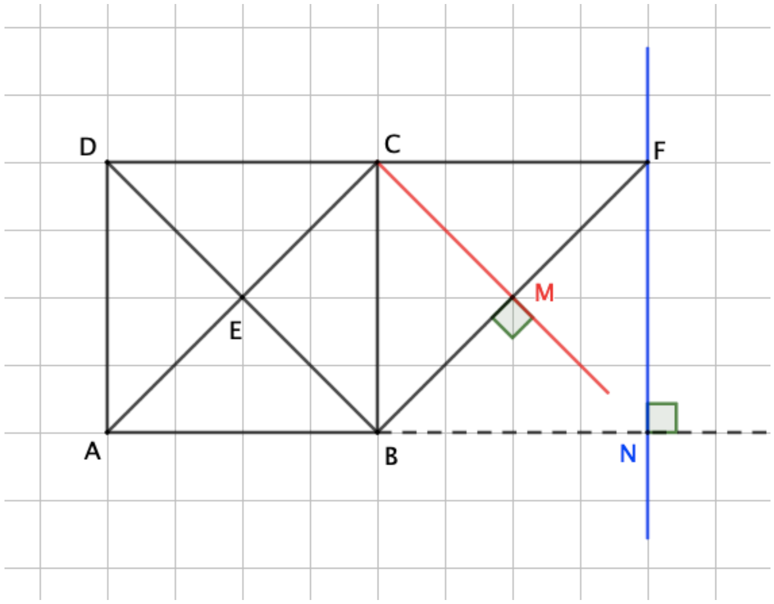
Vidéo https://youtu.be/MiJHpVzyQPc

1) Donner le projeté orthogonal de :
   a) C sur (AB) b) B sur (DF)
   c) D sur (AC) d) F sur (AD)
2) Représenter sur la figure le projeté orthogonal de :
   a) C sur (BF). Nommer ce point M.
   b) F sur (AB). Nommer ce point N.



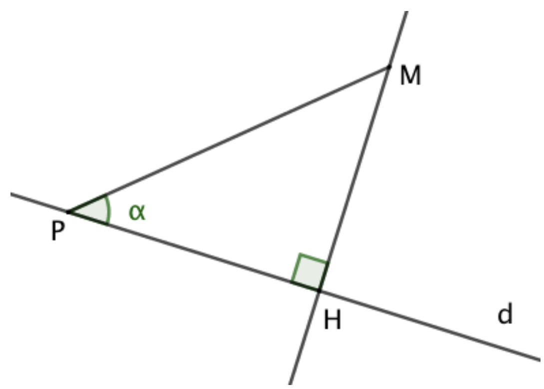
Correction
1) a) Il s'agit du point B. En effet, la perpendiculaire à (AB) passant par C coupe (AB) en B.
   b) Il s'agit du point C.
   c) Il s'agit du point E.
   d) Il s'agit du point D.

2)



Démonstration au programme : $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$

Vidéo https://youtu.be/9r2qDd7EkMo



Soit une droite d et un point P appartenant à d.
Soit un point M n'appartenant pas à d.
On appelle H le projeté orthogonal du point M sur la droite d.
On note α l'angle $\widehat{MPH}$.
Démontrons que $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$.

Le triangle PHM est rectangle en H, on a donc : $\cos\alpha = \dfrac{PH}{PM}$ soit $PH = PM \times \cos\alpha$.
De même, on a : $\sin\alpha = \dfrac{HM}{PM}$ soit $HM = PM \times \sin\alpha$.

D'après le théorème de Pythagore, on a : $PH^2 + HM^2 = PM^2$
Soit en remplaçant : $(PM \times \cos\alpha)^2 + (PM \times \sin\alpha)^2 = PM^2$
Soit encore : $PM^2 \times (\cos\alpha)^2 + PM^2 \times (\sin\alpha)^2 = PM^2$
Soit enfin, en simplifiant : $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$.