DÉRIVATION – Chapitre 3/3

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/uMSNlIPBFhQ

Partie 1 : Étude des variations d'une fonction

1) Variations et signe de la dérivée

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.

Remarques : - Si $f'(x) = 0$, alors f est **constante** sur I.
- Si $f'(x) > 0$, alors f est **strictement** croissante sur I.

Méthode : Comprendre le lien entre signe de la dérivée et variations de la fonction

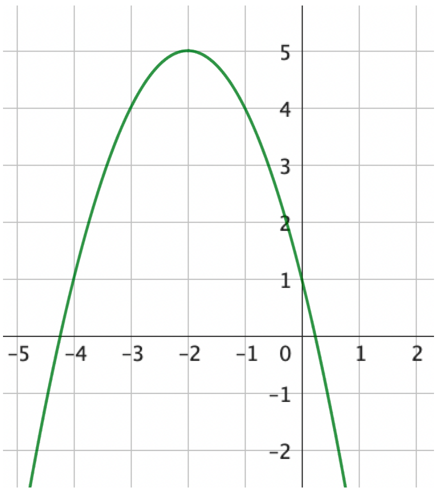
Vidéo https://youtu.be/dPIlTNyBCiw

a) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, tel que $f(2) = -1$.
On donne le signe de la dérivée, compléter le tableau de variations.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$					

b) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, tel que $f(4) = 3$.
On donne les variations de la fonction f, compléter le tableau avec le signe de la dérivée.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$		↗		↘	



c) On donne la représentation graphique de la fonction f, compléter le tableau de variations.

x	$-\infty$				$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$					

Correction

a)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-1	↗	

b)

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	3	↘	

c)

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	5	↘	

2) Étude des variations d'une fonction du second degré

Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré

Vidéo https://youtu.be/EXTobPZzORo

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$.
a) Calculer la fonction dérivée f' de f.
b) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
c) Dresser le tableau de variations de f.

Correction

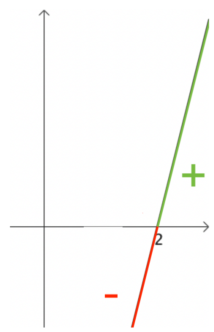
a) $f'(x) = 2 \times 2x - 8 = 4x - 8$.

b) Étude du signe de la dérivée :
On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
Soit : $4x - 8 = 0$

$$4x = 8$$

$$x = \frac{8}{4} = 2.$$

La fonction f' est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 4 est positif.
Donc f' est croissante. Elle est donc d'abord négative (avant $x = 2$) puis positive (après $x = 2$).



c) On dresse le tableau de variations en appliquant le théorème :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-7	↗	

$f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 1 = -7.$

2) Étude des variations d'une fonction du 3^e^ degré

Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du 3^e^ degré

Vidéo https://youtu.be/23_Ba3N0fu4

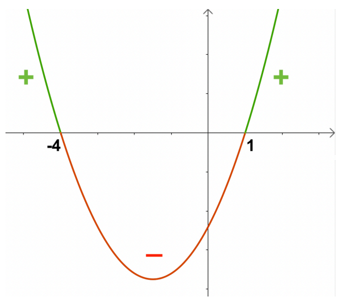
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.
a) Calculer la fonction dérivée f' de f.
b) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
c) Dresser le tableau de variations de f.

Correction

a) $f'(x) = 3x^2 + \frac{9}{2} \times 2x - 12 = 3x^2 + 9x - 12.$

b) Étude du signe de la dérivée :
On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$:
Le discriminant du trinôme $3x^2 + 9x - 12$ est égal à $\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225$
L'équation possède deux solutions : $x_1 = \frac{-9-\sqrt{225}}{2\times3} = -4$ et $x_2 = \frac{-9+\sqrt{225}}{2\times3} = 1$

Comme $a = 3 > 0$, les branches de la parabole représentant la fonction dérivée sont tournées vers le haut (position « 😊 »).
La dérivée est donc d'abord positive, puis négative, puis positive.



c) On dresse le tableau de variations en appliquant le théorème :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	61	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	

$f(-4) = (-4)^3 + \frac{9}{2}(-4)^2 - 12 \times (-4) + 5 = 61$

$f(1) = 1^3 + \frac{9}{2} \times 1^2 - 12 \times 1 + 5 = -\frac{3}{2}$

3) Étude des variations d'une fonction rationnelle

Méthode : Étudier les variations d'une fonction rationnelle

Vidéo https://youtu.be/5NrV-TXme_8

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{x+3}{2-x}$

a) Calculer la fonction dérivée f' de f.
b) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
c) Dresser le tableau de variations de f.

Correction

a) $f(x) = \frac{x+3}{2-x} = \frac{u(x)}{v(x)}$

avec $u(x) = x + 3 \rightarrow u'(x) = 1$

$v(x) = 2 - x \rightarrow v'(x) = -1$

Donc : $f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

$$= \frac{1\times(2-x)-(x+3)\times(-1)}{(2-x)^2}$$

$$= \frac{2-x+x+3}{(2-x)^2}$$

$$= \frac{5}{(2-x)^2}$$

b) Étude du signe de la dérivée :
$(2-x)^2$ est un carré donc toujours positif.
Donc $f'(x) > 0$.

c) On dresse alors le tableau de variations :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$		↗	‖	↗	

La double-barre dans le tableau signifie que la fonction n'est pas définie pour $x = 2$.

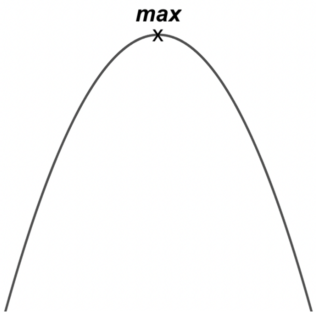
Partie 2 : Extremum d'une fonction

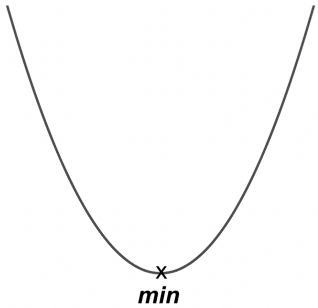
La fonction admet un **maximum** au point où la dérivée s'annule et change de signe.

La fonction admet un **minimum** au point où la dérivée s'annule et change de signe.

x			
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

x			
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$





Théorème : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I.
Si la dérivée f' s'annule et change de signe en un réel c alors f admet un extremum en $x = c$.

Méthode : Déterminer un extremum d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/zxyKLqnlMlk

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 10x + 1$.
a) Calculer la fonction dérivée f' de f.
b) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
c) Dresser le tableau de variations de f.
d) En déduire que la fonction f admet un extremum sur $\mathbb{R}$. On précisera la valeur où il est atteint.
e) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point de l'extremum.

Correction
a) $f'(x) = 10x - 10$

b) Étude du signe de la dérivée :
On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
Soit : $10x - 10 = 0$
$10x = 10$

$x = \frac{10}{10} = 1.$

La fonction f' est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 10 est positif.
f' est croissante. Elle est donc d'abord négative (avant $x = 1$) puis positive (après $x = 1$).

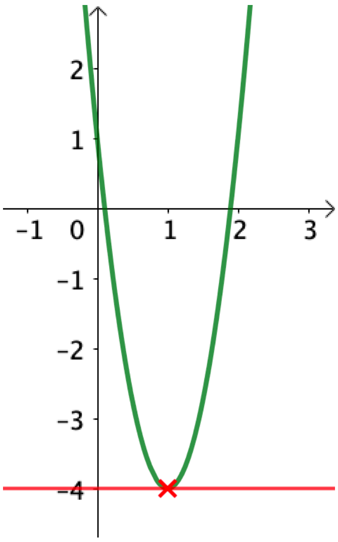
c) On dresse alors le tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

$f(1) = 5 \times 1^2 - 10 \times 1 + 1 = -4$

d) On lit dans le tableau de variations que la fonction f admet un minimum égal à -4 en $x = 1$.

e) Au point de l'extremum de la fonction, la dérivée s'annule.
On a $f'(1) = 0$.
La tangente est donc de pente nulle et parallèle à l'axe des abscisses.
Comme $f(1) = -4$, l'équation de la tangente est $y = -4$.



Méthode : Tracer une courbe à l'aide du tableau de variations

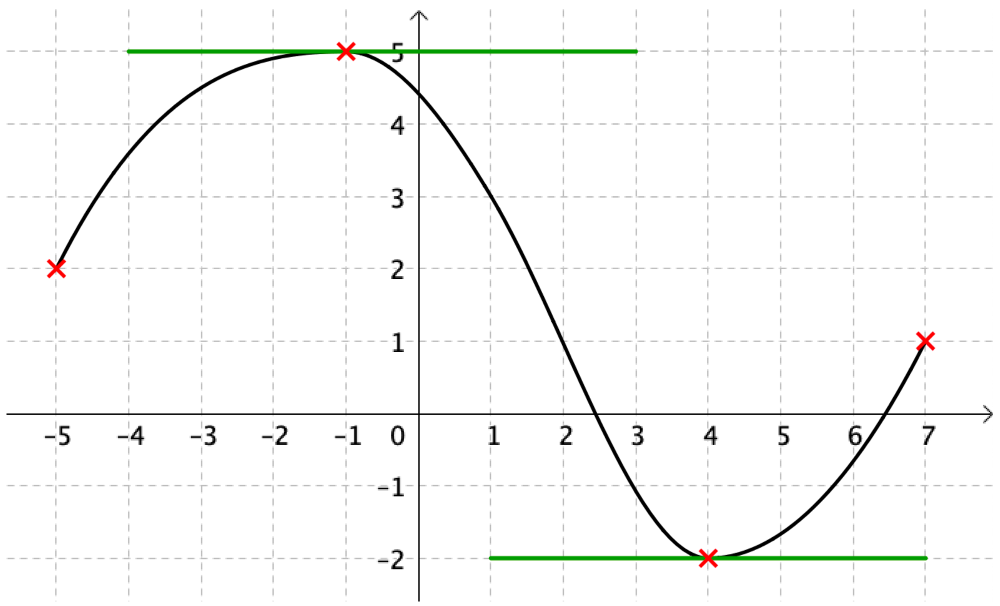
Vidéo https://youtu.be/gPhyoY-d_VU

On donne le tableau de variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[-5 ; 7]$
Tracer dans un repère une représentation graphique de la fonction f.

x	-5		-1		4		7
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1

Correction
On commence par placer les points de la courbe de coordonnées $(-5\,;2)$, $(-1\,;5)$, $(4\,;-2)$ et $(7\,;1)$.
La dérivée s'annule en -1, la courbe possède donc une tangente horizontale d'équation $y = 5$ en -1.
De même en 4, la courbe possède une tangente horizontale d'équation $y = -2$.
On trace ces deux tangentes au voisinage de -1 pour l'une et de 4 pour l'autre.

On trace la courbe passant par les quatre points en s'appuyant sur les deux tangentes.



Partie 3 : Applications

1) Étude du signe d'une fonction

Méthode : Étudier le signe d'une fonction à l'aide de ses variations

Vidéo https://youtu.be/nLoOEQ9mLW0

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 4x - 5$.
a) Démontrer que la fonction f est strictement croissante.
b) Vérifier que 1 est une racine de f.
c) Dresser le tableau de variations de f et en déduire le signe de f en fonction de x.

Correction
a) $f'(x) = 3x^2 + 4$
Comme un carré est toujours positif, $f'(x) > 0$.
On en déduit que la fonction f est strictement croissante.

b) $f(1) = 1^3 + 4 \times 1 - 5 = 0$
Donc 1 est une racine de f.

c)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		0 ↗	

D'après le tableau de variations :
- f est négative sur $]-\infty\,;1]$,
- f est positive sur $[1\,;\,+\infty[$.

2) <u>Étudier la position de deux courbes</u>

<u>Méthode :</u> Étudier la position relative de deux courbes

Vidéo https://youtu.be/ON14GJOYogw

Soit f et g deux fonctions définies sur $[2\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = -5x + 18$.
Étudier la position relative des courbes représentatives C_f et C_g.

Correction
On va étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$:
On pose : $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - (-5x + 18) = x^3 + 5x - 18$.

On a : $h'(x) = 3x^2 + 5$
Donc $h'(x) > 0$.
On en déduit que la fonction h est strictement croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

x	2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	0	↗	

$$h(2) = 2^3 + 5 \times 2 - 18 = 0$$
D'après le tableau de variations, on a : $h(x) \geq 0$.
Soit : $f(x) - g(x) \geq 0$ et donc $f(x) \geq g(x)$.
On en déduit que la courbe C_f est au-dessus de la courbe C_g sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.

3) Résoudre un problème d'optimisation

Méthode : Résoudre un problème d'optimisation

Vidéo https://youtu.be/V0gLF8iWARs

Une entreprise fabrique des composants pour ordinateur. Pour une quantité x, exprimée en milliers de composants, le coût total en milliers d'euros est :
$C(x) = 0{,}2x^2 + 24x + 20$ avec $x \in [0; 30]$.
La recette est alors égale à : $R(x) = 30x$.
Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût total.
Déterminer le bénéfice maximal et le nombre de composants correspondants à produire.

Correction

● On calcule l'expression de la fonction B donnant le bénéfice :

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 30x - (0{,}2x^2 + 24x + 20) \\ &= 30x - 0{,}2x^2 - 24x - 20 \\ &= -0{,}2x^2 + 6x - 20 \end{aligned}$$

● On calcule la dérivée B' :
$B'(x) = -0{,}2 \times 2x + 6 = -0{,}4x + 6$

● On résout l'équation $B'(x) = 0$:
$-0{,}4x + 6 = 0$

$$x = \frac{-6}{-0{,}4} = 15$$

La fonction B' est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur $-0{,}4$ est négatif.
B' est décroissante, elle est donc d'abord positive (avant $x = 15$) puis négative (après $x = 15$).

● Tableau de variations :

x	$-\infty$		15		$+\infty$
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		$\nearrow$	25	$\searrow$	

$B(15) = -0{,}2 \times 15^2 + 6 \times 15 - 20 = 25$

● On lit dans le tableau que la fonction B atteint son maximum en 15 et ce maximum est égal à 25. Le bénéfice maximal est donc de 25 000 € pour 15 000 composants produits.

© Copyright

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales