DÉRIVATION – Chapitre 2/3

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/uMSNlIPBFhQ

Partie 1 : Dérivées des fonctions usuelles

1) Exemples d'introduction :

Démonstration au programme : Dérivée de la fonction carré

Vidéo https://youtu.be/-nRmE8yFSSg

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Démontrons que pour tout x réel, on : $f'(x) = 2x$.

Calculons le nombre dérivé de la fonction f en a (nombre réel quelconque).

Pour $h \neq 0$: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^2-a^2}{h} = \dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \dfrac{h(2a+h)}{h} = 2a+h$

Or : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2a+h = 2a$

Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $2a$.
On a donc défini sur $\mathbb{R}$ une fonction, notée f' dont l'expression est $f'(x) = 2x$.
Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de f.

Le mot « dérivé » vient du latin « derivare » qui signifiait « détourner un cours d'eau ».
Le mot a été introduit par le mathématicien franco-italien *Joseph Louis Lagrange* (1736 ; 1813) pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de "provenir") d'une autre fonction.

Démonstration au programme : Dérivée de la fonction inverse

Vidéo https://youtu.be/rQ1XfMN5pdk

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Démontrons que pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Pour $h \neq 0$ et $h \neq -a$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$$

Or : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \left(-\dfrac{1}{a(a+h)}\right) = -\dfrac{1}{a^2}$

Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $-\dfrac{1}{a^2}$.

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Définitions :
On dit que la fonction f est **dérivable** sur un intervalle I, si elle est dérivable en tout réel de I. Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f'.

2) Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction	Dérivée
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$ $n \geq 1$ entier	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Méthode : Dériver les fonctions usuelles

Vidéo https://youtu.be/9Mann4wOGJA

Calculer la dérivée de chacune des fonctions :

$f(x) = 100$; $g(x) = -5x$; $h(x) = x^4$; $k(x) = \frac{1}{x^5}$; $m(x) = \sqrt{x}$

Correction

$f(x) = 100 \ \rightarrow f'(x) = 0$
$g(x) = -5x \ \rightarrow \ g'(x) = -5$
$h(x) = x^4 \ \rightarrow h'(x) = 4x^3$
$k(x) = \frac{1}{x^5} \ \rightarrow k'(x) = -\frac{5}{x^6}$
$m(x) = \sqrt{x} \ \rightarrow m'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3) Cas de la fonction racine carrée

On peut lire dans le tableau plus haut que la fonction racine carrée est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ mais dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Démonstration au programme : Non dérivabilité de la fonction racine carrée en 0

Vidéo https://youtu.be/N5wnOoLDrjo

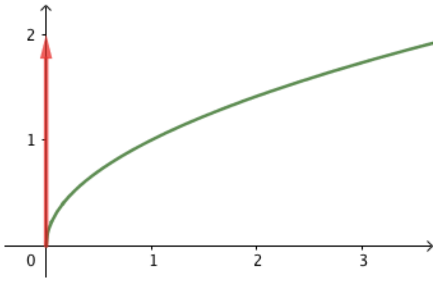
Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
On calcule le taux d'accroissement de f en 0 :

Pour $h > 0$: $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}\sqrt{h}}{h\sqrt{h}} = \frac{h}{h\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$

Or : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$.

En effet, lorsque h tend vers 0, $\frac{1}{\sqrt{h}}$ prend des valeurs de plus en plus grandes.

Donc f n'est pas dérivable en 0.
Géométriquement, cela signifie que la courbe représentative de la fonction racine carrée admet une tangente verticale en 0.



Partie 2 : Opérations sur les fonctions dérivées

1) Opérations sur les fonctions dérivées :

u et v sont deux fonctions dérivables.

Fonction	Dérivée
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = ku(x),\ \ k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = ku'(x)$
$f(x) = u(x)v(x)$	$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$	$f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$
$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

Démonstration au programme pour le produit :

Vidéo https://youtu.be/PI4A8TLGnxE

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
On veut démontrer que pour tout a de I, on a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$$

$$\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$$

$$= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a+h) + u(a)v(a+h) - u(a)v(a)}{h}$$

$$= \frac{(u(a+h) - u(a))v(a+h) + u(a)\big(v(a+h) - v(a)\big)}{h}$$

$$= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} v(a+h) + u(a)\frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

En passant à la limite lorsque h tend vers 0, on a :

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$

Car u et v sont dérivables sur I.

Et, $\lim\limits_{h \to 0} v(a+h) = v(a)$.

Soit, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$

Ainsi : $(uv)' = u'v + uv'$

Méthode : Calculer les dérivées de sommes, produits et quotients de fonctions

Vidéo https://youtu.be/ehHoLK98Ht0
Vidéo https://youtu.be/1fOGueiO_zk
Vidéo https://youtu.be/OMsZNNIIdrw
Vidéo https://youtu.be/jOuC7aq3YkM
Vidéo https://youtu.be/-MfEczGz_6Y

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de f :

a) $f(x) = 3x^2 + 4\sqrt{x}$ b) $f(x) = 5x^3 - 3x^2$

c) $f(x) = (3x^2 + 4x)(5x - 1)$ d) $f(x) = \frac{1}{2x^2+5x}$ e) $f(x) = \frac{6x-5}{x^2-2x-1}$

Correction

a) $f(x) = u(x) + v(x)$ avec $u(x) = 3x^2 \rightarrow u'(x) = 3 \times 2x = 6x$

$v(x) = 4\sqrt{x} \rightarrow v'(x) = 4\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$

Donc : $f'(x) = u'(x) + v'(x) = 6x + \frac{2}{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = u(x) + v(x)$ avec $u(x) = 5x^3 \rightarrow u'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$

$v(x) = -3x^2 \rightarrow v'(x) = -3 \times 2x = -6x$

Donc : $f'(x) = u'(x) + v'(x) = 15x^2 + (-6x) = 15x^2 - 6x$

c) $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = 3x^2 + 4x \rightarrow u'(x) = 6x + 4$

$v(x) = 5x - 1 \rightarrow v'(x) = 5$

Donc : $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$= (6x + 4)(5x - 1) + (3x^2 + 4x) \times 5$

$= 30x^2 - 6x + 20x - 4 + 15x^2 + 20x$

$= 45x^2 + 34x - 4$

d) $f(x) = \frac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = 2x^2 + 5x \rightarrow u'(x) = 4x + 5$

Donc : $f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{4x+5}{(2x^2+5x)^2}$

e) $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 6x - 5 \rightarrow u'(x) = 6$

$v(x) = x^2 - 2x - 1 \rightarrow v'(x) = 2x - 2$

Donc : $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

$= \frac{6(x^2-2x-1)-(6x-5)(2x-2)}{(x^2-2x-1)^2}$

$= \frac{6x^2-12x-6-12x^2+12x+10x-10}{(x^2-2x-1)^2}$

$= \frac{-6x^2+10x-16}{(x^2-2x-1)^2}$

2) Dérivée d'une fonction composée

Fonction	Dérivée
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$

Méthode : Dériver une fonction composée $f(ax+b)$

Vidéo https://youtu.be/aFkPQkg0p-A

Calculer les fonctions dérivées des fonctions g et h définies par :
$g(x) = (7x+1)^3$ $\quad$ $h(x) = \sqrt{5x-4}$

Correction
1) $g(x) = (7x+1)^3$
$g'(x) = 7 \times 3(7x+1)^2 = 21(7x+1)^2$
En effet, la dérivée de la fonction cube est $(x^3)' = 3x^2$

2) $h(x) = \sqrt{5x-4}$
$h'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{5x-4}} = \frac{5}{2\sqrt{5x-4}}$
En effet, la dérivée de la fonction racine carrée est $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$