DÉRIVATION – Chapitre 2/3

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/uMSNllPBFhQ**](https://youtu.be/uMSNllPBFhQ)

**Partie 1 : Dérivées des fonctions usuelles**

 1) Exemples d’introduction :

Démonstration au programme : Dérivée de la fonction carré

 **Vidéo** [**https://youtu.be/-nRmE8yFSSg**](https://youtu.be/-nRmE8yFSSg)

Soit la fonction $f$ définie sur $R$ par $f\left(x\right)=x^{2}$.

Démontrons que pour tout $x$ réel, on : $f'\left(x\right)=2x$.

Calculons le nombre dérivé de la fonction $f$ en $a$ (nombre réel quelconque).

Pour $h\ne 0$ : $\frac{f\left(a+h\right)-f\left(a\right)}{h}$ = $\frac{\left(a+h\right)^{2}-a^{2}}{h}$ = $\frac{a^{2}+2ah+h^{2}-a^{2}}{h}$ = $\frac{h\left(2a+h\right)}{h}$ = $2a+h$

Or : $\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(a+h\right)-f\left(a\right)}{h}$ = $\lim\_{h\to 0}2a+h$ = $2a$

Pour tout nombre $a$, on associe le nombre dérivé de la fonction $f$ égal à $2a$.

On a donc défini sur $R$ une fonction, notée $f'$ dont l'expression est $f'\left(x\right)=2x$.

Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de $f$.



Le mot « dérivé » vient du latin « derivare » qui signifiait « détourner un cours d’eau ».

Le mot a été introduit par le mathématicien franco-italien *Joseph Louis Lagrange* (1736 ; 1813) pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de "provenir") d'une autre fonction.

Démonstration au programme : Dérivée de la fonction inverse

 **Vidéo** [**https://youtu.be/rQ1XfMN5pdk**](https://youtu.be/rQ1XfMN5pdk)

Soit la fonction $f$ définie sur $R\{0\}$ par $f\left(x\right)=$ $\frac{1}{x}$.

Démontrons que pour tout $x$ de $R\{0\}$, on a : $f'\left(x\right)=$ $-\frac{1}{x^{2}}$.

Pour $h\ne 0$ et $h\ne -a$ :

$\frac{f\left(a+h\right)-f\left(a\right)}{h}$ = $\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}$ = $\frac{\frac{a-a-h}{a\left(a+h\right)}}{h}$ = $\frac{\frac{-h}{a\left(a+h\right)}}{h}$ = $-$ $\frac{1}{a\left(a+h\right)}$

Or : $\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(a+h\right)-f\left(a\right)}{h}$ = $\lim\_{h\to 0}\left(- \frac{1}{a\left(a+h\right)}\right)$ = $-$ $\frac{1}{a^{2}}$

Pour tout nombre $a$, on associe le nombre dérivé de la fonction $f$ égal à $-$ $\frac{1}{a^{2}}$.

Ainsi, pour tout $x$ de $R\{0\}$, on a : $f'\left(x\right)=$ $-\frac{1}{x^{2}}$.

Définitions :

On dit que la fonction $f $est **dérivable** sur un intervalle $I, $si elle est dérivable en tout réel de $I$. Dans ce cas, la fonction qui à tout réel $x $de $I$ associe le nombre dérivé de $f $en $x $est appelée **fonction dérivée** de $f $et se note $f'$.

 2) Dérivées des fonctions usuelles :

|  |  |
| --- | --- |
| **Fonction**  | **Dérivée**  |
| $f\left(x\right)=a$, $a\in R$ | $$f'\left(x\right)=0$$ |
| $f\left(x\right)=ax$, $a\in R$ | $$f'\left(x\right)=a$$ |
| $f\left(x\right)=x^{2}$  | $$f'\left(x\right)=2x$$ |
| $$f\left(x\right)=x^{n}$$$n\geq 1$ entier | $$f'\left(x\right)=nx^{n-1}$$ |
| $f\left(x\right)=$ $\frac{1}{x}$ | $f^{'}(x)=-$ $\frac{1}{x^{2}}$ |
| $f\left(x\right)=$ $\frac{1}{x^{n}}$$n\geq 1$ entier | $f'\left(x\right)=$ $-\frac{n}{x^{n+1}}$ |
| $$f\left(x\right)=\sqrt{x}$$ | $f'\left(x\right)=$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |

Méthode : Dériver les fonctions usuelles

 **Vidéo** [**https://youtu.be/9Mann4wOGJA**](https://youtu.be/9Mann4wOGJA)

Calculer la dérivée de chacune des fonctions :

$f\left(x\right)=100$ ; $g\left(x\right)=-5x$ ; $h\left(x\right)=x^{4}$ ; $k\left(x\right)=$ $\frac{1}{x^{5}}$ ; $m\left(x\right)=\sqrt{x}$

**Correction**

$f\left(x\right)=100 \rightarrow $ $f^{'}\left(x\right)=0$

$$g\left(x\right)=-5x \rightarrow g'\left(x\right)=-5$$

$h\left(x\right)=x^{4} \rightarrow $ $h'\left(x\right)=4x^{3}$

$k\left(x\right)=$ $\frac{1}{x^{5}} \rightarrow $ $k'\left(x\right)=$ $-\frac{5}{x^{6}}$

$m\left(x\right)=\sqrt{x} \rightarrow $ $m'\left(x\right)=$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

 3) Cas de la fonction racine carrée

On peut lire dans le tableau plus haut que la fonction racine carrée est définie sur l’intervalle
$\left[0 ; +\infty \right[ $mais dérivable sur l’intervalle ]$0 ; +\infty [$.

Démonstration au programme : Non dérivabilité de la fonction racine carrée en 0

 **Vidéo** [**https://youtu.be/N5wnOoLDrjo**](https://youtu.be/N5wnOoLDrjo)

Soit la fonction $f$ définie sur $\left[0 ; +\infty \right[$ par $f\left(x\right)=\sqrt{x}$.

On calcule le taux d’accroissement de $f$ en 0 :

Pour $h>0$ : $\frac{f\left(0+h\right)-f\left(0\right)}{h}$ = $\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} $= $\frac{\sqrt{h}}{h}$ = $\frac{\sqrt{h}\sqrt{h}}{h\sqrt{h}} $= $\frac{h}{h\sqrt{h}} $= $\frac{1}{\sqrt{h}}$

Or : $\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(0+h\right)-f\left(0\right)}{h}$ = $\lim\_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}}$ = $+\infty $.

En effet, lorsque $h$tend vers 0, $\frac{1}{\sqrt{h}}$ prend des valeurs de plus en plus grandes.

Donc $f$ n’est pas dérivable en 0.

Géométriquement, cela signifie que la courbe

représentative de la fonction racine carrée admet

une tangente verticale en 0.

**Partie 2 : Opérations sur les fonctions dérivées**

* 1) Opérations sur les fonctions dérivées :

$u$ et $v$ sont deux fonctions dérivables.

|  |  |
| --- | --- |
| **Fonction**  | **Dérivée**  |
| $f\left(x\right)=u(x)+v(x)$  | $$f^{'}\left(x\right)=u'(x)+v'(x)$$ |
| $f\left(x\right)=ku(x)$,$ k\in R$ | $$f^{'}\left(x\right)=ku'(x)$$ |
| $f\left(x\right)=u(x)v(x)$  | $$f^{'}\left(x\right)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$ |
| $$f\left(x\right)=\frac{1}{u(x)}$$ | $$f^{'}\left(x\right)=-\frac{u'(x)}{u(x)^{2}}$$ |
| $$f\left(x\right)=\frac{u(x)}{v(x)}$$ | $$f^{'}\left(x\right)=\frac{u^{'}\left(x\right)v\left(x\right)-u\left(x\right)v'(x)}{v(x)^{2}}$$ |

Démonstration au programme pour le produit :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/PI4A8TLGnxE**](https://youtu.be/PI4A8TLGnxE)

Soit $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $I$.

On veut démontrer que pour tout $a$ de $I$, on a :

$\lim\_{h\to 0}\frac{\left(uv\right)\left(a+h\right)-\left(uv\right)\left(a\right)}{h}$ $=$ $u^{'}\left(a\right)v\left(a\right)+u\left(a\right)v'(a)$

$\frac{\left(uv\right)\left(a+h\right)-\left(uv\right)\left(a\right)}{h}$ $=$ $\frac{u\left(a+h\right)v\left(a+h\right)-u\left(a\right)v\left(a\right)}{h}$

 $=\frac{u\left(a+h\right)v\left(a+h\right)-u\left(a\right)v\left(a+h\right)+u\left(a\right)v(a+h)-u\left(a\right)v\left(a\right)}{h}$

 $=\frac{\left(u\left(a+h\right)-u(a)\right)v\left(a+h\right)+u\left(a\right)\left(v\left(a+h\right)-v\left(a\right)\right)}{h}$

 $=$ $\frac{u\left(a+h\right)-u\left(a\right)}{h}$ $v(a+h)$ + $u(a)\frac{v\left(a+h\right)-v\left(a\right)}{h}$

En passant à la limite lorsque $h$ tend vers 0, on a :

$\lim\_{h\to 0}\frac{u\left(a+h\right)-u\left(a\right)}{h}$ = $u'(a)$ et $\lim\_{h\to 0}\frac{v\left(a+h\right)-v\left(a\right)}{h}$ = $v'(a)$

Car $u$ et $v$ sont dérivables sur $I$.

Et,$ \lim\_{h\to 0}v(a+h)$ = $v(a)$.

Soit, $\lim\_{h\to 0}\frac{\left(uv\right)\left(a+h\right)-\left(uv\right)\left(a\right)}{h}$ = $u^{'}\left(a\right)v\left(a\right)+u\left(a\right)v'(a)$

Ainsi : $\left(uv\right)'=u'v+uv'$

Méthode : Calculer les dérivées de sommes, produits et quotients de fonctions

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ehHoLK98Ht0**](https://youtu.be/ehHoLK98Ht0)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/1fOGueiO\_zk**](https://youtu.be/1fOGueiO_zk)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/OMsZNNIIdrw**](https://youtu.be/OMsZNNIIdrw)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/jOuC7aq3YkM**](https://youtu.be/jOuC7aq3YkM)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/-MfEczGz\_6Y**](https://youtu.be/-MfEczGz_6Y)

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de $f$ :

a) $f\left(x\right)=3x^{2}+4\sqrt{x}$ b) $f\left(x\right)=5x^{3}-3x^{2}$

c) $f\left(x\right)=\left(3x^{2}+4x\right)\left(5x-1\right)$ d) $f\left(x\right)=\frac{1}{2x^{2}+5x}$ e) $f\left(x\right)=\frac{6x-5}{x^{2}-2x-1}$

**Correction**

a) $f\left(x\right)=u\left(x\right)+v\left(x\right)$ avec $u\left(x\right)=3x^{2}$ $\rightarrow $ $u'\left(x\right)=3×2x=6x$

 $v\left(x\right)=4\sqrt{x}$ $\rightarrow v'\left(x\right)=4$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ = $\frac{2}{\sqrt{x}}$

 Donc : $f'\left(x\right)=u'\left(x\right)+v'\left(x\right)$ = $6x$ + $\frac{2}{\sqrt{x}}$

b) $f\left(x\right)=u\left(x\right)+v\left(x\right)$ avec $u\left(x\right)=5x^{3}$ $\rightarrow $ $u^{'}(x)=5×3x^{2}=15x^{2}$

 $v\left(x\right)=-3x^{2}$ $\rightarrow v^{'}(x)=-3×2x=-6x$

Donc : $f^{'}\left(x\right)=u^{'}(x)+v^{'}(x)=15x^{2}+(-6x)=15x^{2}-6x$

c) $f\left(x\right)=u\left(x\right)v\left(x\right)$ avec $u\left(x\right)=3x^{2}+4x$ $\rightarrow $ $u^{'}(x)=6x+4$

 $v\left(x\right)=5x-1$ $\rightarrow v'\left(x\right)=5$

 Donc : $f'\left(x\right)=u'\left(x\right)v\left(x\right)+u\left(x\right)v'\left(x\right)$

 $=$ $\left(6x+4\right)\left(5x-1\right)$ + $\left(3x^{2}+4x \right)×5$

 $=30x^{2}-6x+20x-4+15x^{2}+20x$

 $=45x^{2}+34x-4$

d) $f\left(x\right)=\frac{1}{u(x)}$ avec $u\left(x\right)=2x^{2}+5x$ $\rightarrow $ $u^{'}(x)=4x+5$

 Donc : $f'\left(x\right)$= $-$ $\frac{u^{'}(x)}{u(x)^{2}}$ = $-$ $\frac{4x+5}{(2x^{2}+5x)^{2}}$

e) $f\left(x\right)=\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u\left(x\right)=6x-5$ $\rightarrow $ $u^{'}(x)=6$

 $v\left(x\right)=x^{2}-2x-1$ $\rightarrow v^{'}\left(x\right)=2x-2$

Donc : $f'\left(x\right)=$ $\frac{u^{'}(x)v(x)-u(x)v^{'}(x)}{v(x)^{2}}$

 $=$ $\frac{6(x^{2}-2x-1)-(6x-5)(2x-2)}{(x^{2}-2x-1)^{2}}$

 $=$ $\frac{6x^{2}-12x-6-12x^{2}+12x+10x-10}{(x^{2}-2x-1)^{2}}$

 $=$ $\frac{-6x^{2}+10x-16}{(x^{2}-2x-1)^{2}}$

 2) Dérivée d’une fonction composée

|  |  |
| --- | --- |
| **Fonction** | **Dérivée** |
| $$f(ax+b)$$ | $$af'(ax+b)$$ |

Méthode : Dériver une fonction composée $f(ax+b)$

 **Vidéo** [**https://youtu.be/aFkPQkg0p-A**](https://youtu.be/aFkPQkg0p-A)

Calculer les fonctions dérivées des fonctions $g$ et $h$ définies par :

$g\left(x\right)=\left(7x+1\right)^{3}$ $h\left(x\right)=\sqrt{5x-4}$

**Correction**

1) $g\left(x\right)=\left(7x+1\right)^{3}$

$$ g^{'}\left(x\right)=7×3\left(7x+1\right)^{2}=21\left(7x+1\right)^{2}$$

En effet, la dérivée de la fonction cube est $\left(x^{3}\right)^{'}=3x^{2}$

2) $h\left(x\right)=\sqrt{5x-4}$

$ h'\left(x\right)=5×$ $\frac{1}{2\sqrt{5x-4}}$ = $\frac{5}{2\sqrt{5x-4}}$

En effet, la dérivée de la fonction racine carrée est $\left(\sqrt{x}\right)^{'}=$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)