

DÉRIVATION – Chapitre 1/3


▶ Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/uMSNIIPBFhQ>

Partie 1 : Limite en zéro d'une fonction

Exemples d'introduction :

1) Soit la fonction f définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{(x+1)^2 - 1}{x}$.

L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.



x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	...	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 0.

On dit que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à 2 et on note : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

2) Soit la fonction g définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

A l'aide de la calculatrice, on constate que $g(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0.

On dit que la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à $+\infty$ et on note :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty.$$

Définition : On dit que f a pour **limite** L lorsque x tend vers 0 si les valeurs de $f(x)$ peuvent être aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de 0.

On note : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$ et on lit : la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à L .

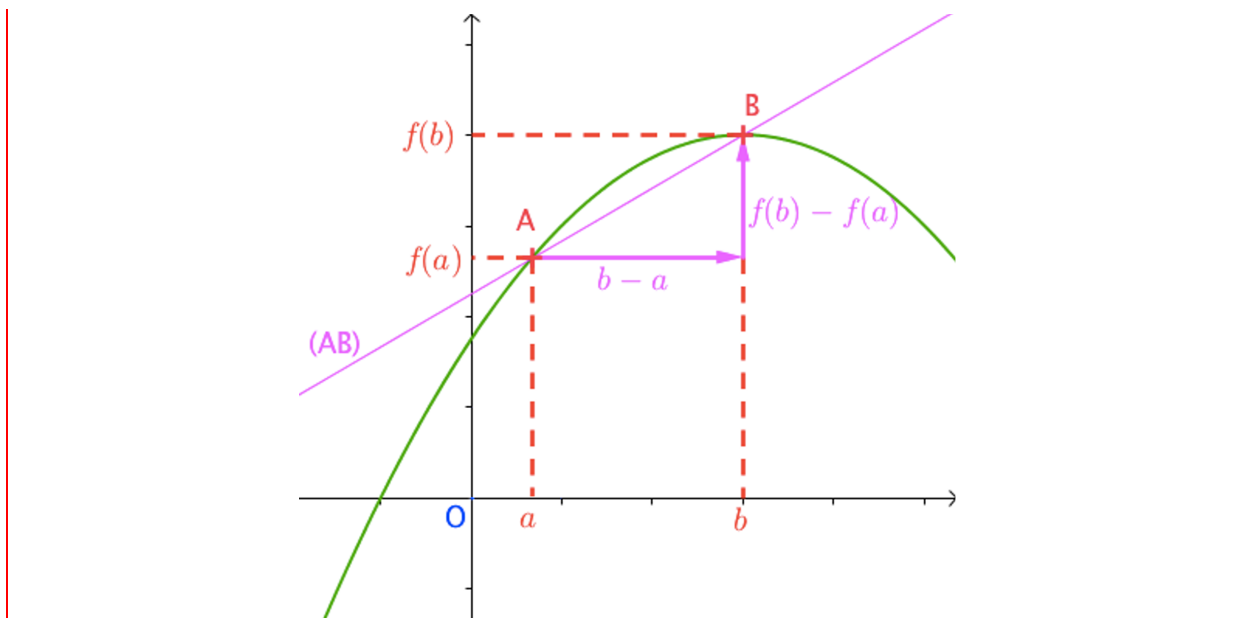
Partie 2 : Nombre dérivé

1) Pente d'une droite (rappel)

Formule du taux d'accroissement :

Sur le graphique suivant, la pente de la droite (AB) sécante à la courbe est égale à :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



2) Fonction dérivable

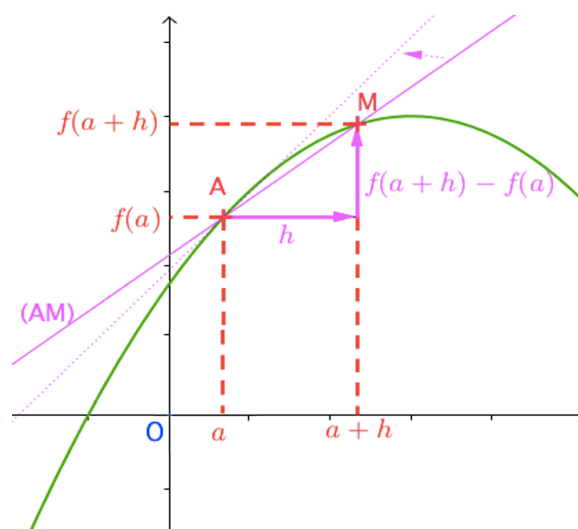
Sur le graphique ci-contre, la pente de la droite (AM) sécante à la courbe est égale à :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \text{ avec } h \neq 0.$$

Lorsque M se rapproche de A, h se rapproche de 0. On note : $h \rightarrow 0$.

La droite (AM) se rapproche alors d'une position limite dont la pente est égale à $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Cette pente s'appelle le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.



Définition : On dit que la fonction f est **dérivable** en a s'il existe un nombre réel L , tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L.$$

L est appelé le **nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$.

Remarque :

Dans la définition, si L n'est pas égal à un nombre, alors f n'est pas dérivable en a .

Par exemple, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}$ n'est pas un nombre. En effet, $\frac{1}{h}$ se rapproche de $+\infty$ lorsque h se rapproche de 0.

Méthode : Démontrer qu'une fonction est dérivable

▶ Vidéo <https://youtu.be/UmT0Gov6yyE>

▶ Vidéo https://youtu.be/lv5_mw1EYBE

Soit la fonction trinôme f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
Démontrer que f est dérivable en $x = 2$.

Correction

On commence par calculer $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ pour $h \neq 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \frac{(2+h)^2 + 2(2+h) - 3 - 2^2 - 2 \times 2 + 3}{h} \\ &= \frac{4 + 4h + h^2 + 4 + 2h - 8}{h} \\ &= \frac{6h + h^2}{h} \\ &= \frac{h(6+h)}{h} \\ &= 6 + h \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 6 + h = 6 + 0 = 6$$

On en déduit que f est dérivable en $x = 2$.

Le nombre dérivé de f en 2 vaut 6 et on note : $f'(2) = 6$.

3) Cas de la fonction valeur absolue

Définition : La **fonction valeur absolue** est la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x|$.

Exemples :

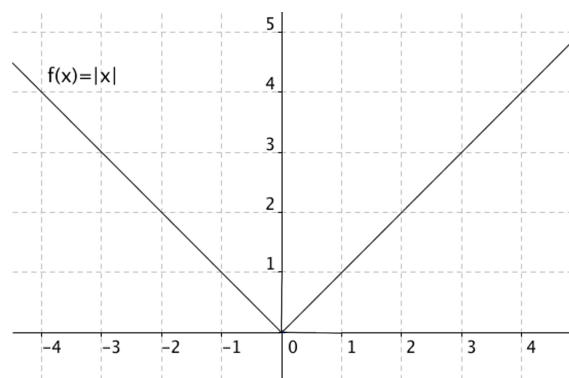
$$- f(-5) = |-5| = 5$$

$$- f(4) = |4| = 4$$

Propriété :

Si $x \geq 0$, alors $f(x) = |x| = x$

Si $x \leq 0$, alors $f(x) = |x| = -x$



Propriété : La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Éléments de démonstration :

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{sur }]-\infty ; 0] \\ x & \text{sur } [0 ; +\infty[\end{cases}$$

Sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0]$ et $[0 ; +\infty[$, la fonction valeur absolue est une fonction affine.

Méthode : Démontrer la non dérivabilité en 0 de la fonction valeur absolue

📺 Vidéo <https://youtu.be/ZKtxnTalvvs>

Démontrer que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Correction

Soit la fonction f définie par $f(x) = |x|$.

On calcule le taux d'accroissement de f en 0 :

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \frac{h}{h} = 1, & \text{si } h > 0. \\ \frac{-h}{h} = -1, & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

Donc : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ n'existe pas car dépend du signe de h . La limite ne peut pas être égale à la fois à 1 et à -1 .

La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0.

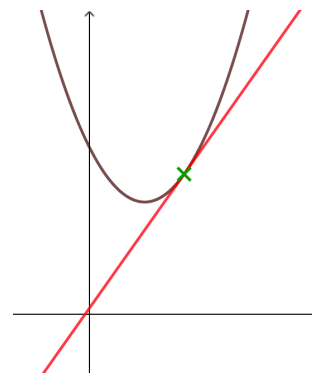
En observant la courbe représentative de la fonction valeur absolue, on comprend bien qu'il n'existe pas de tangente à la courbe en 0.

Remarque : Cependant, il est à noter que la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable en tout nombre différent de 0.

Partie 3 : Tangente à une courbe

1) Pente de la tangente

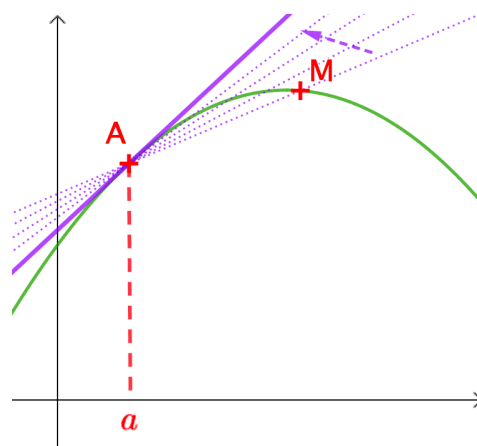
Une tangente à une courbe est une droite qui « touche » la courbe en un point.



Définition : La **tangente** à la courbe au point A d'abscisse a est la droite passant par A de pente le nombre dérivé $f'(a)$.

Lorsque le point M se rapproche du point A, la droite sécante (AM) se rapproche de la tangente en A à la courbe.

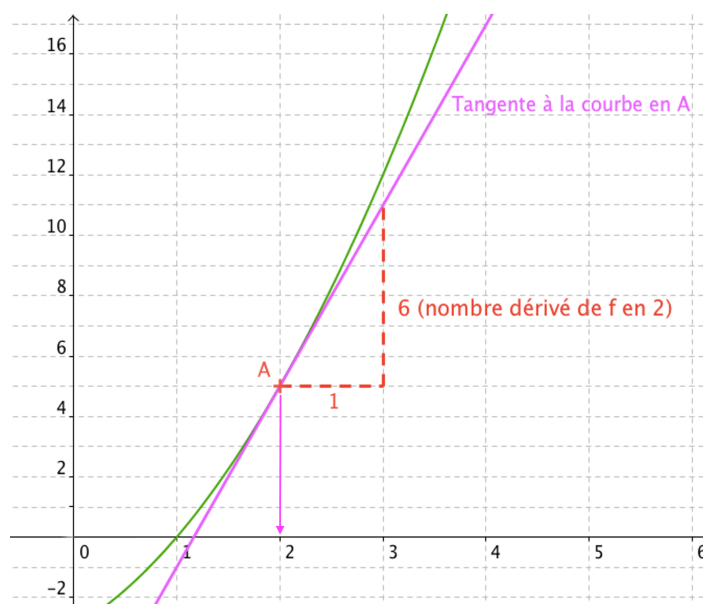
Donc la pente de la tangente est égale au nombre dérivé $f'(a)$ défini dans le paragraphe précédent.



Exemple :

Sur le graphique ci-contre, on lit que la pente de la **tangente en 2** est égale à **6**.

On a donc : $f'(2) = 6$



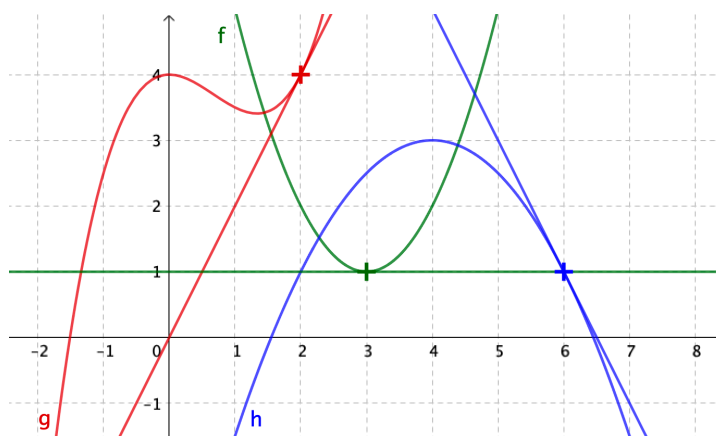
Méthode : Déterminer graphiquement le nombre dérivé

 Vidéo <https://youtu.be/f7AuwNAagAQ>

a) On a représenté les fonctions f , g et h et trois tangentes dans un repère.

Lire graphiquement $f'(3)$, $g'(2)$ et $h'(6)$.

b) Tracer la tangente à la courbe de la fonction g en 1 tel que $g'(1) = -\frac{1}{2}$.

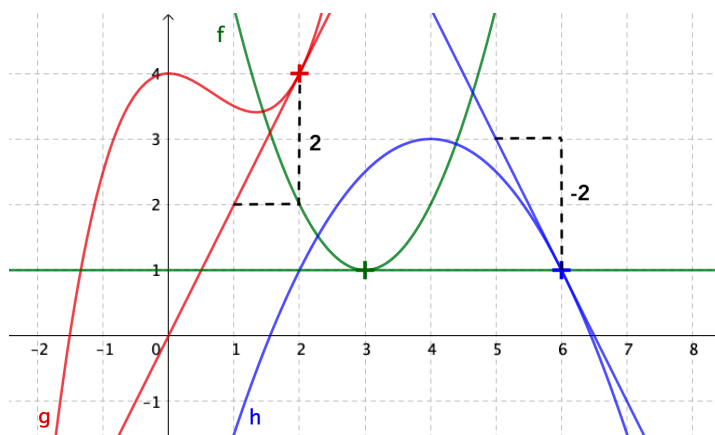


Correction

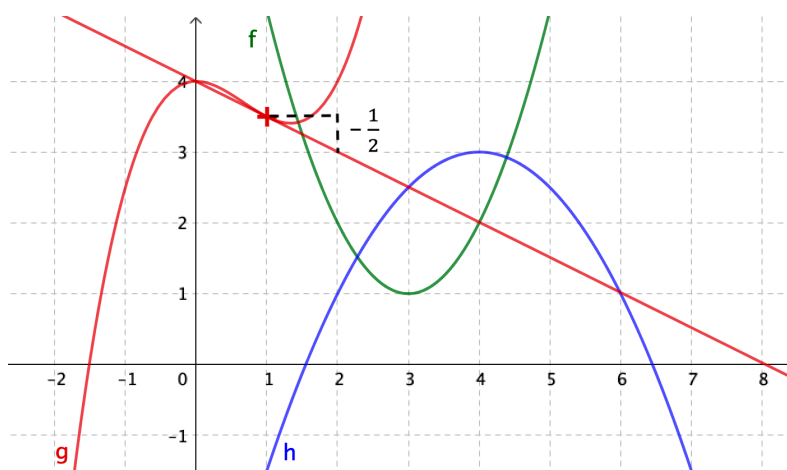
a) $f'(3) = 0$ en effet la tangente est parallèle à l'axe des abscisses donc sa pente est nulle.

$$g'(2) = 2$$

$$h'(6) = -2$$



b)



2) Équation de la tangente

Propriété : Une équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Démonstration au programme :

📺 Vidéo <https://youtu.be/Jj0ql6-o2Uo>

La tangente a pour pente $f'(a)$ donc son équation est de la forme :
 $y = f'(a)x + b$ où b est l'ordonnée à l'origine.

Déterminons b :

La tangente passe par le point $A(a ; f(a))$, donc :

$$f(a) = f'(a) \times a + b \text{ soit : } b = f(a) - f'(a) \times a$$

On en déduit que l'équation de la tangente peut s'écrire :

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a$$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Méthode : Déterminer l'équation d'une tangente à une courbe

▶ Vidéo <https://youtu.be/fKEGoo50Xmo>

▶ Vidéo <https://youtu.be/OjhxK55jONs>

▶ Vidéo <https://youtu.be/7-z62dSkkTQ>

On considère la fonction trinôme f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 5x + 2$.

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 1$.

Correction

Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est de la forme :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

● On commence par calculer le nombre dérivé en 1, $f'(1)$:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \frac{(1+h)^2 - 5(1+h) + 2 - (1^2 - 5 \times 1 + 2)}{h}$$

$$= \frac{1 + 2h + h^2 - 5 - 5h + 4}{h}$$

$$= \frac{-3h + h^2}{h}$$

$$= \frac{h(-3+h)}{h}$$

$$= -3 + h$$

$$\text{Donc : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -3 + h = -3 + 0 = -3$$

Le nombre dérivé de f en 1 vaut -3 et on note : $f'(1) = -3$.

● On calcule $f(1)$:

$$f(1) = 1^2 - 5 \times 1 + 2 = -2$$

Une équation de la tangente à la courbe en 1 est donc de la forme :

$$y = -3(x - 1) + (-2), \text{ soit :}$$

$$y = -3x + 3 - 2$$

$$y = -3x + 1$$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est

$$y = -3x + 1.$$



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales