DÉRIVATION (Partie 2)

I. Fonction dérivée

Définition :
La fonction qui à tout réel x associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f'.

Notation : La fonction dérivée se note : f' ou $\dfrac{df}{dx}$

Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction f	Dérivée f'
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'^{(x)} = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$

Exemples :

Vidéo https://youtu.be/kiemuwNkQhY

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3$.

Premières formules d'opération sur les fonctions dérivées :

$(u+v)' = u' + v'$
$(ku)' = ku', \qquad k \in \mathbb{R}$

Méthode : Calculer des fonctions dérivées

Vidéo https://youtu.be/uTk3T_GfwYo

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de la fonction f :

1) $f(x) = 3x$ 2) $f(x) = x^2 + 5$ 3) $f(x) = 5x^3$ 4) $f(x) = 3x^2 + \dfrac{4}{x}$

1) $f'(x) = 3$

2) $f'(x) = (x^2)' + (5)' = 2x + 0 = 2x$

3) $f'(x) = 5(x^3)' = 5 \times 3x^2 = 15x^2$

4) $f'(x) = (3x^2)' + \left(\frac{4}{x}\right)' = 3 \times 2x + \left(-\frac{4}{x^2}\right) = 6x - \frac{4}{x^2}$

II. Fonction dérivée d'une fonction polynôme

1) Fonction polynôme de degré 2

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$.
Pour déterminer la fonction dérivée f', on applique la technique suivante :

$$f(x) = 5x^{2} \quad -3\cancel{x} \quad \cancel{+2}$$

$$f'(x) = 2 \times 5x \quad -3$$

Définition : Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On appelle **fonction dérivée** de f, notée f', la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2ax + b$.

Méthode : Déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme du second degré

Vidéo https://youtu.be/5WDIrv_bEYE

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4x^2 - 6x + 1$ b) $g(x) = x^2 - 2x + 6$ c) $h(x) = -3x^2 + 2x + 8$
d) $k(x) = x^2 + x + 1$ e) $l(x) = 5x^2 + 5$ f) $m(x) = -x^2 + 7x$

a) $f(x) = 4x^2 - 6x + 1$ donc $f'(x) = 2 \times 4x - 6 = 8x - 6$
b) $g(x) = x^2 - 2x + 6$ donc $g'(x) = 2 \times x - 2 = 2x - 2$
c) $h(x) = -3x^2 + 2x + 8$ donc $h'(x) = 2 \times (-3)x + 2 = -6x + 2$
d) $k(x) = x^2 + 1x + 1$ donc $k'(x) = 2x + 1$
e) $l(x) = 5x^2 + 5$ donc $l'(x) = 2 \times 5x = 10x$
f) $m(x) = -x^2 + 7x$ donc $m'(x) = -2x + 7$

2) Fonction polynôme de degré 3

Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie par :
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$.
Pour déterminer la fonction dérivée f', on applique la technique suivante :

$$f(x) = 2x^{\cancel{3}\,2} - 3x^{\cancel{2}} + 5\cancel{x} \quad \cancel{-1}$$

$$f'(x) = 3 \times 2x^2 \quad - 2 \times 3x \quad + 5$$

Définition : Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
On appelle **fonction dérivée** de f, notée f', la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Méthode : Déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme du troisième degré

Vidéo https://youtu.be/1fOGueiO_zk

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ b) $g(x) = 5x^3 + 2x^2 + 2x - 7$
c) $h(x) = -2x^3 - 3x^2 - 7x + 8$ d) $k(x) = -x^3 + x^2 + 1$
e) $l(x) = 4x^3 + 1$ f) $m(x) = -x^3 + 7x$

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ donc $f'(x) = 3 \times x^2 - 2 \times 3x + 2 = 3x^2 - 6x + 2$

b) $g(x) = 5x^3 + 2x^2 + 2x - 7$ donc $g'(x) = 3 \times 5x^2 + 2 \times 2x + 2 = 15x^2 + 4x + 2$

c) $h(x) = -2x^3 - 3x^2 - 7x + 8$ donc $h'(x) = 3 \times (-2)x^2 - 2 \times 3x - 7 = -6x^2 - 6x - 7$

d) $k(x) = -x^3 + x^2 + 1$ donc $k'(x) = -3x^2 + 2 \times x = -3x^2 + 2x$

e) $l(x) = 4x^3 + 1$ donc $l'(x) = 3 \times 4x^2 = 12x^2$

f) $m(x) = -x^3 + 7x$ donc $m'(x) = -3x^2 + 7$

III. Opérations sur les fonctions dérivées

1) Produit et quotient de fonctions dérivées :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Méthode : Calculer les dérivées de sommes, produits et quotients de fonctions

Vidéo https://youtu.be/1fOGueiO_zk
Vidéo https://youtu.be/OMsZNNIIdrw
Vidéo https://youtu.be/jOuC7aq3YkM
Vidéo https://youtu.be/-MfEczGz_6Y

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = (3x^2 + 4x)(5x - 1)$ 2) $f_2(x) = \frac{1}{2x^2+5x}$ 3) $f_3(x) = \frac{6x-5}{x^3-2x^2-1}$

1) $f_1(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = 3x^2 + 4x \rightarrow u'(x) = 6x + 4$
$v(x) = 5x - 1 \rightarrow v'(x) = 5$

Donc : $f_1'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (6x + 4)(5x - 1) + (3x^2 + 4x) \times 5$
$= 30x^2 - 6x + 20x - 4 + 15x^2 + 20x$
$= 45x^2 + 34x - 4$

2) $f_2(x) = \frac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = 2x^2 + 5x \rightarrow u'(x) = 4x + 5$

Donc : $f_2'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{4x+5}{(2x^2+5x)^2}$

3) $f_3(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 6x - 5 \rightarrow u'(x) = 6$
$v(x) = x^3 - 2x^2 - 1 \rightarrow v'(x) = 3x^2 - 4x$

Donc : $f_3'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

$= \frac{6(x^3-2x^2-1)-(6x-5)(3x^2-4x)}{(x^3-2x^2-1)^2}$

$= \frac{6x^3-12x^2-6-18x^3+24x^2+15x^2-20x}{(x^3-2x^2-1)^2}$

$= \frac{-12x^3+27x^2-20x-6}{(x^3-2x^2-1)^2}$

2) Dérivées de fonctions composées

Fonction	Dérivée
$A\cos(\omega t+\varphi)$	$-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$
$A\sin(\omega t+\varphi)$	$A\omega\cos(\omega t+\varphi)$
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$

Méthode : Calculer les dérivées de fonctions composées

Vidéo https://youtu.be/Py4f2YAwebA

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x)=3\cos(2t+\pi)$

2) $g(x)=-4\sin\left(-3t-\frac{\pi}{4}\right)$

1) $f(x)=3\cos(2t+\pi)$

donc :

$f'(x)=-3\times 2\sin(2t+\pi)$

$=-6\sin(2t+\pi)$

2) $g(x)=-4\sin\left(-3t-\frac{\pi}{4}\right)$

donc :

$g'(x)=-4\times(-3)\cos\left(-3t-\frac{\pi}{4}\right)$

$=12\cos\left(-3t-\frac{\pi}{4}\right)$

IV. Application à l'étude des variations d'une fonction

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
- Si $f'(x)\leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x)\geq 0$, alors f est croissante sur I.

Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré

Vidéo https://youtu.be/EXTobPZzORo

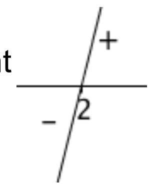
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-8x+1$.
1) Calculer la fonction dérivée de f.
2) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.

1) Pour tout x réel, on a : $f'(x)=2\times 2x-8=4x-8$.

2) On commence par résoudre l'équation $f'(x)=0$.
Soit : $4x-8=0$

Donc $4x=8$ et $x=\frac{8}{4}=2$.

La fonction f' est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 4 est positif.
Elle est donc d'abord négative (avant $x=2$) puis ensuite positive (après $x=2$).



3) On dresse alors le tableau de variations en appliquant le théorème :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘	-7	↗	

En effet : $f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 1 = -7$.
La fonction f admet un minimum égal à -7 en $x = 2$.

V. Extremum d'une fonction

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.
Si la dérivée f' de f s'annule et change de signe en un réel c de I alors f admet un extremum en $x = c$.

Méthode : Rechercher un extremum

Vidéo https://youtu.be/zxyKLqnlMIk

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$ admet-elle un extremum sur $\mathbb{R}$?

Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 10x - 3$
Et : $f'(x) = 0$ pour $x = \frac{3}{10}$.
On dresse alors le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\frac{3}{10}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	$\frac{71}{20}$	↗	

En effet : $f\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{71}{20}$
La fonction f admet donc un minimum égal à $\frac{71}{20}$ en $x = \frac{3}{10}$.