

DÉRIVATION (Partie I)



Le mot « dérivé » vient du latin « derivare » qui signifiait « détourner un cours d'eau ».

Le mot a été introduit par le mathématicien franco-italien *Joseph Louis Lagrange* (1736 ; 1813) pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de "provenir") d'une autre fonction.

I. Limite en zéro d'une fonction

Exemple :

1) Soit la fonction f définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{(x+1)^2 - 1}{x}$.

L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	...	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 0.

On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 est égale à 2 et on note : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

II. Nombre dérivé

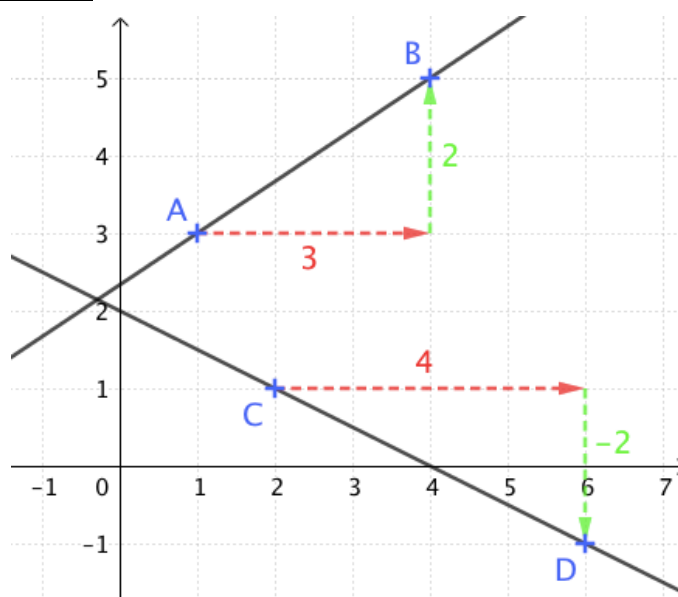
1) Rappel : Coefficient directeur d'une droite

Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à :

$$\frac{5 - 3}{4 - 1} = \frac{2}{3}$$

Le coefficient directeur de la droite (CD) est égal à :

$$\frac{-1 - 1}{6 - 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$



2) Fonction dérivable

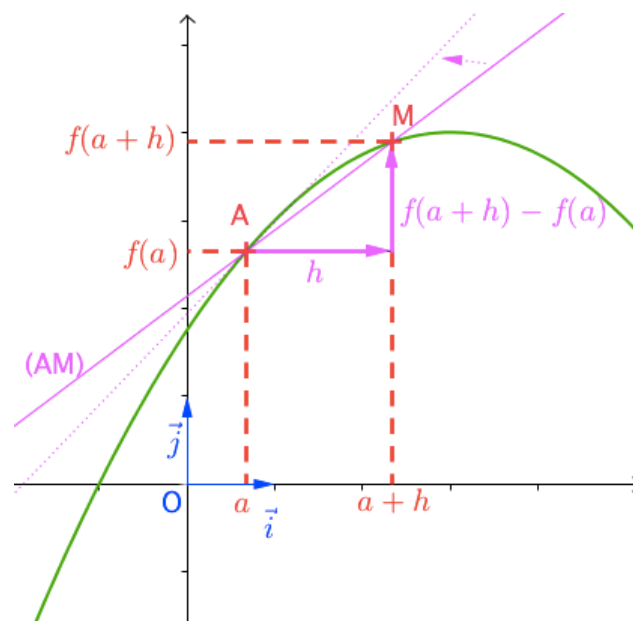
Soit une fonction f .

Soit A et M deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et $a+h$.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à : $\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Lorsque le point M se rapproche du point A, le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

Ce coefficient directeur s'appelle le nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$.



Le nombre dérivé de f en a est :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Méthode : Calculer le nombre dérivé

Vidéo <https://youtu.be/UmT0Gov6yyE>

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Calculer le nombre dérivé de la fonction f en $x = 2$.

- On commence par calculer $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$:

$$\begin{aligned} & \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \frac{(2+h)^2 + 2(2+h) - 3 - 2^2 - 2 \times 2 + 3}{h} \\ &= \frac{4 + 4h + h^2 + 4 + 2h - 8}{h} \\ &= \frac{6h + h^2}{h} \\ &= \frac{h(6+h)}{h} \\ &= 6 + h \end{aligned}$$

- On calcule la limite de $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ lorsque h tend vers 0 :

$$\text{Donc : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 6 + h = 6$$

Le nombre dérivé de f en 2 est égal à 6. Et on note $f'(2) = 6$.

2) Notations

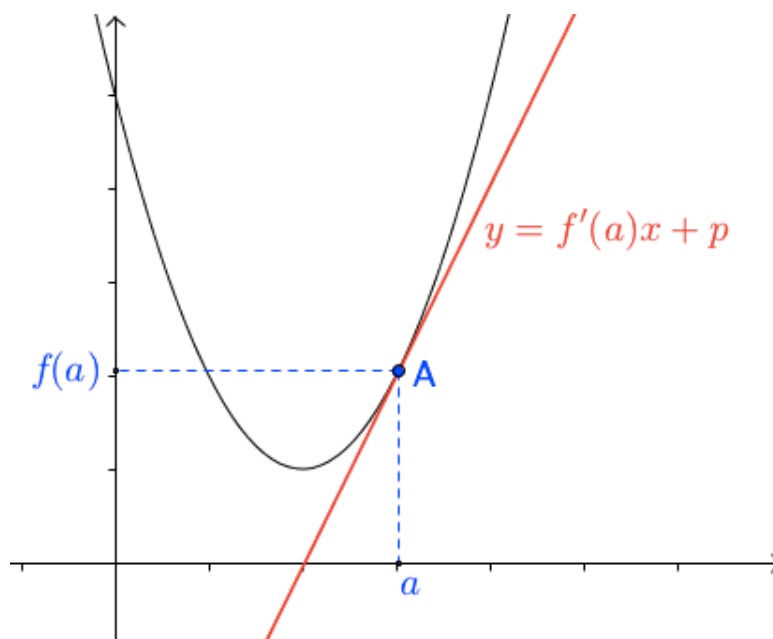
Le nombre dérivé de f en a se note :

$$f'(a) \text{ ou } \frac{df}{dx}(a) \text{ ou } \frac{dy}{dx}(a) \text{ ou encore } \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_a$$

III. Tangente à une courbe

1) Coefficient directeur de la tangente

A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative d'une fonction f .



Définition : La **tangente** à la courbe au point A d'abscisse a est la droite :

- passant par A,
- de coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$.

Méthode : Déterminer le coefficient directeur d'une tangente à une courbe

📺 Vidéo <https://youtu.be/0jhxK55jONs>

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 2x - 3$ dont le nombre dérivé en 2 a été calculé plus haut.

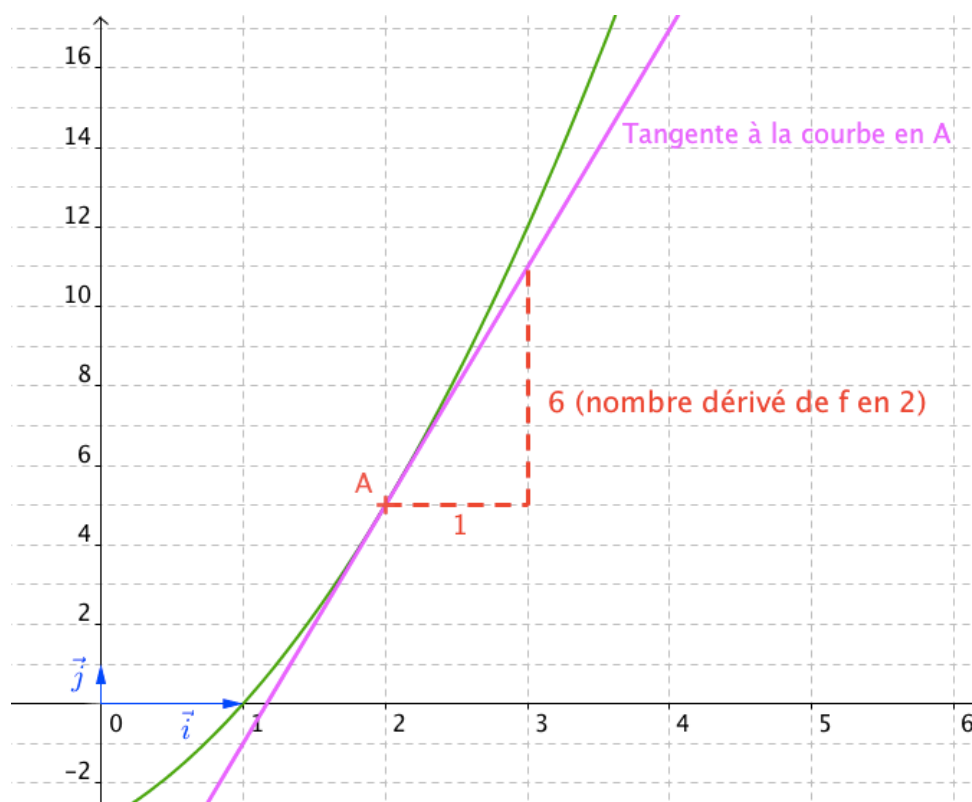
1) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

- 2) a) En s'aidant de la calculatrice graphique, reproduire la courbe de la fonction f .
 b) Construire la tangente à la courbe de la fonction en 2.

1) On a vu dans le paragraphe I. que le nombre dérivé de f en 2 est égal à 6.
 Ainsi la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est la droite passant par A et de coefficient directeur 6.

2) - On commence par placer le point A de coordonnées $(2 ; f(2))$, avec $f(2) = 2^2 + 2 \times 2 - 3 = 5$.

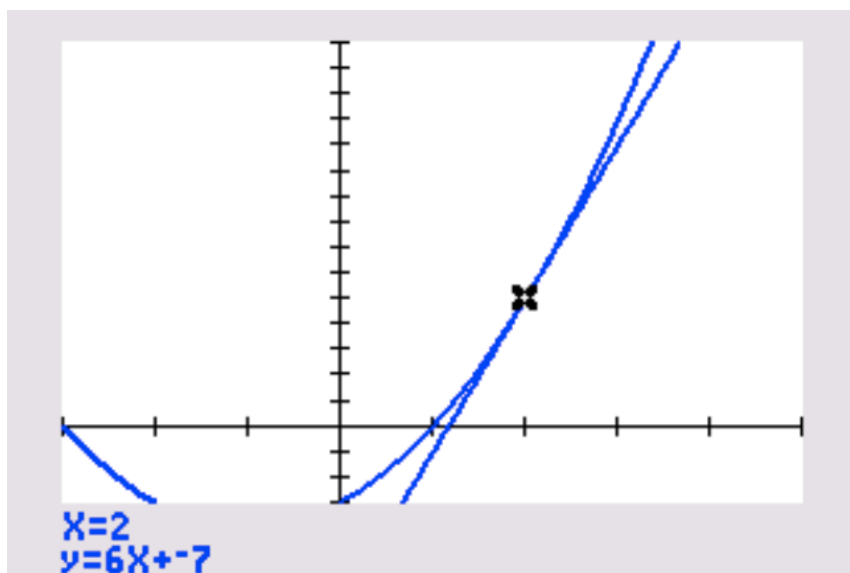
- On trace la tangente passant par A et de coefficient directeur 6.
 Pour cela, on avance de 1 dans le sens des abscisses puis de 6 dans le sens des ordonnées.



Une fois la courbe tracée sur la calculatrice, on peut afficher la tangente.
 Pour cela, saisir :

Avec TI-83 : Touches « 2^{nde} » + « PGRM » (Dessin) puis « 5: Tangente » et saisir l'abscisse du point de tangence, ici 2. Puis « ENTER ».

Casio 35+ : Touches « SHIFT » + « F4 » (Skech) puis « Tang » et saisir l'abscisse du point de tangence, ici 2. Puis « EXE » + « EXE ».



2) Équation de la tangente

Propriété : Une équation de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Méthode : Déterminer une équation d'une tangente à une courbe

▶ Vidéo <https://youtu.be/fKEGoo50Xmo>

▶ Vidéo <https://youtu.be/7-z62dSkkTQ>

On considère la fonction trinôme f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
 Déterminer une équation de tangente à la courbe représentative de f au point de la courbe d'abscisse 2.

On a vu dans la méthode du paragraphe I. que $f'(2) = 6$.
 Donc une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2 est de la forme : $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$, soit : $y = 6(x - 2) + f(2)$
 Soit encore :

$$y = 6(x - 2) + 2^2 + 2 \times 2 - 3$$

$$y = 6x - 7$$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point de la courbe d'abscisse 2 est $y = 6x - 7$.

3) Approximation affine d'une fonction

Au voisinage du point de coordonnées $(a ; f(a))$, la tangente est une approximation affine de la courbe représentative de f .

Cela signifie que l'équation de la tangente permet d'obtenir des valeurs approchées d'images par f pour des valeurs proches de 2.

Exemple :

Dans l'exemple de la méthode précédente, on a :

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$\text{Tangente en } 2 : y = 6x - 7$$

Il est possible de calculer une approximation de f au voisinage de 2 à l'aide de l'équation de la tangente.

On a par exemple :

$$f(2,01) \approx 6 \times 2,01 - 7 \text{ car l'équation de la tangente en } 2 \text{ est } y = 6x - 7.$$

Vérification :

$$f(2,01) = 2,01^2 + 2 \times 2,01 - 3 = 5,0601$$

et

$$6 \times 2,01 - 7 = 5,06$$

On constate donc que $f(2,01) \approx 6 \times 2,01 - 7$

La tangente permet ainsi d'obtenir une bonne approximation de f au voisinage de 2.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales