DÉRIVATION – Chapitre 1/2

Le mot « dérivé » vient du latin « derivare » qui signifiait « détourner un cours d'eau ».
Le mot a été introduit par le mathématicien franco-italien *Joseph Louis Lagrange* (1736 ; 1813) pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de "provenir") d'une autre fonction.

Partie 1 : Limite en zéro d'une fonction

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\frac{(x+1)^2-1}{x}$.
L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	…	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 0.
On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 est égale à 2 et on note : $\lim_{x\to 0} f(x)=2$.

Partie 2 : Nombre dérivé

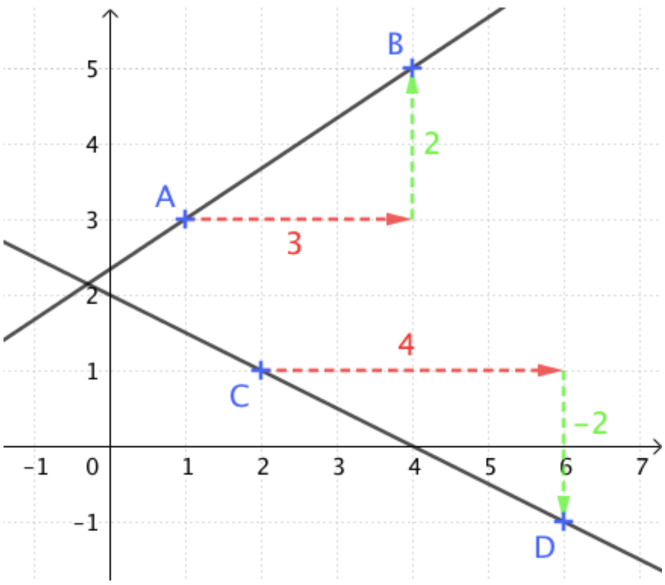
1) Rappel : Coefficient directeur (pente) d'une droite

Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à :

$$\frac{5-3}{4-1}=\frac{2}{3}$$

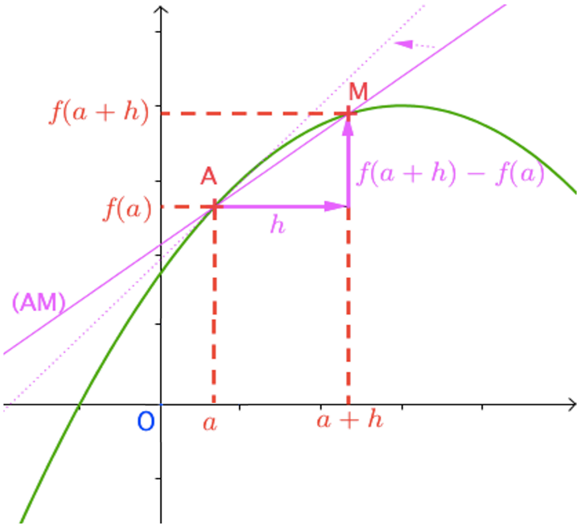
Le coefficient directeur de la droite (CD) est égal à :

$$\frac{-1-1}{6-2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$



2) Fonction dérivable

Sur le graphique ci-contre, la pente (coefficient directeur) de la droite (AM) sécante à la courbe est égale à :
$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, avec $h \neq 0$.



Lorsque M se rapproche de A, h tend vers 0 ($h \to 0$).
La droite (AM) se rapproche alors d'une position limite dont la pente est égale à $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Cette pente s'appelle le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.

Le **nombre dérivé** de f en a est :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Méthode : Calculer le nombre dérivé

Vidéo https://youtu.be/UmT0Gov6yyE

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
Calculer le nombre dérivé de la fonction f en $x = 2$.

Correction

- On commence par calculer : $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$:

$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$
$= \frac{(2+h)^2+2(2+h)-3-2^2-2\times 2+3}{h}$
$= \frac{4+4h+h^2+4+2h-8}{h}$
$= \frac{6h+h^2}{h}$
$= \frac{h(6+h)}{h}$
$= 6+h$

- On calcule la limite de $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ lorsque h tend vers 0 :

Donc : $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} 6+h = 6$
Le nombre dérivé de f en 2 est égal à 6. Et on note $f'(2) = 6$.

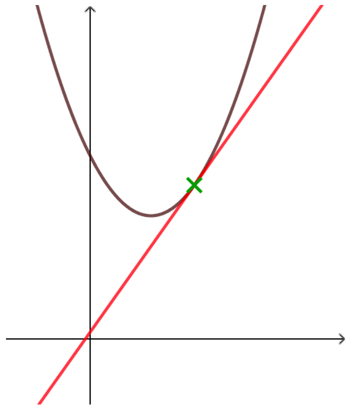
2) Notations

Le nombre dérivé de f en a se note :
$f'(a)$ ou $\dfrac{df}{dx}(a)$ ou $\dfrac{dy}{dx}(a)$ ou encore $\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)_a$

Partie 3 : Tangente à une courbe

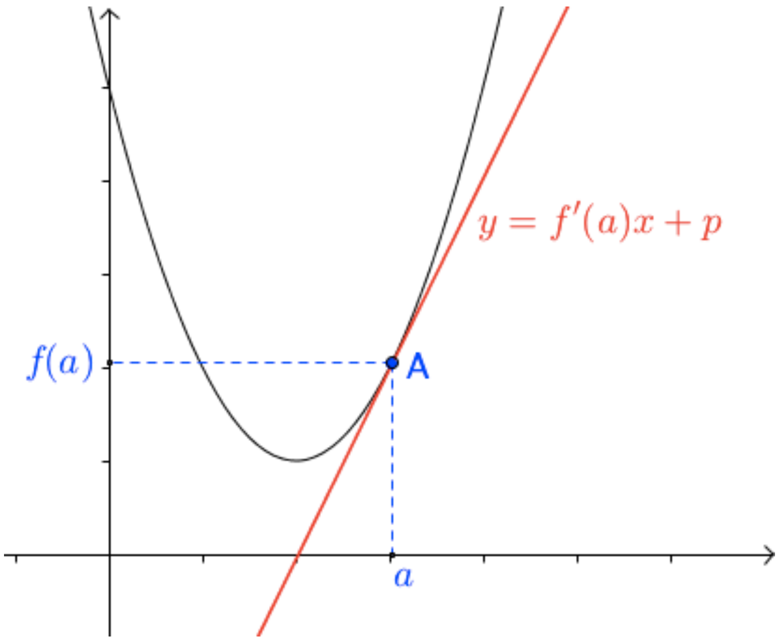
1) Définition

Une tangente à une courbe est une droite qui « touche » la courbe en un point.



2) Coefficient directeur de la tangente

A est le point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative de la fonction f.



Définition : La **tangente** à la courbe au point A d'abscisse a est la droite :
- passant par A,
- de coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$.

Méthode : Déterminer le coefficient directeur d'une tangente à une courbe

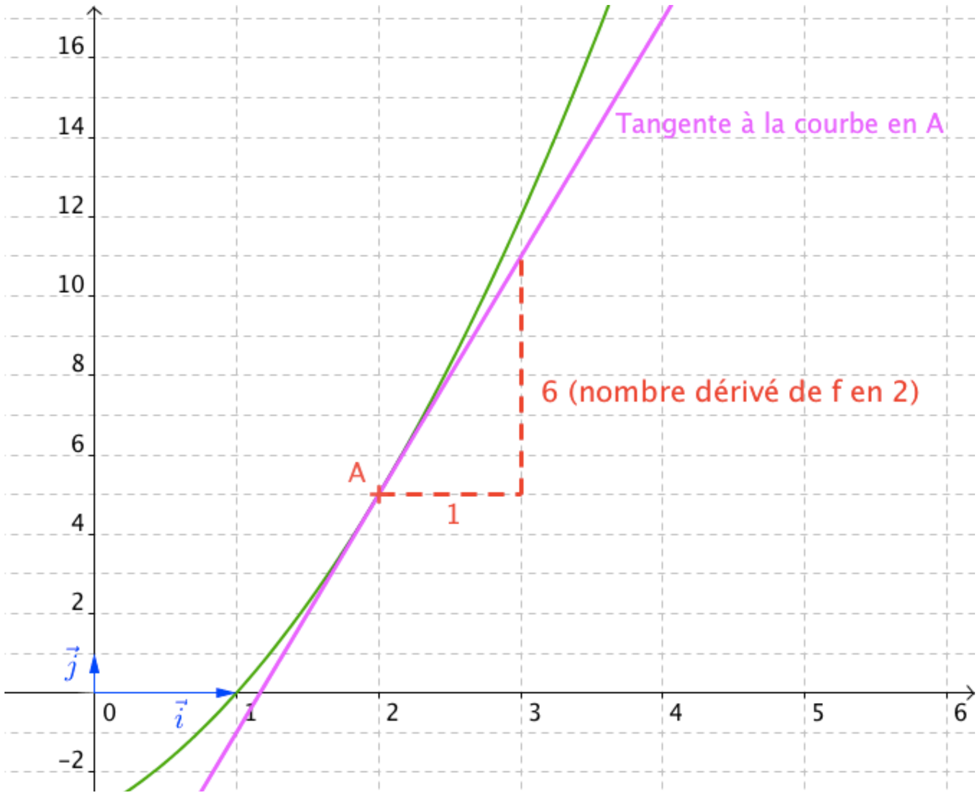
Vidéo https://youtu.be/0jhxK55jONs

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$ dont le nombre dérivé en 2 a été calculé plus haut.
1) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.
2) a) En s'aidant de la calculatrice graphique, reproduire la courbe de la fonction f.
b) Construire la tangente à la courbe de la fonction en 2.

Correction
1) On a vu dans la partie 1 que le nombre dérivé de f en 2 est égal à 6.
Ainsi la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est la droite passant par A et de coefficient directeur 6.

2) - On commence par placer le point A de coordonnées $(2\,;f(2))$, avec
$f\,(2) = 2^2 + 2 \times 2 - 3 = 5$.

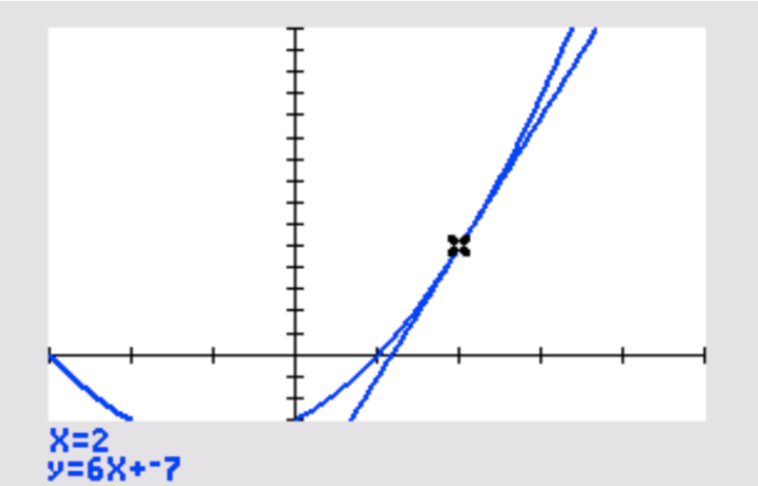
- On trace la tangente passant par A et de coefficient directeur 6.
Pour cela, on avance de 1 dans le sens des abscisses puis de 6 dans le sens des ordonnées.



Une fois la courbe tracée sur la calculatrice, on peut afficher la tangente.
Pour cela, saisir :

Avec TI-83 : Touches « 2nde » + « PGRM » (Dessin) puis « 5: Tangente » et saisir l'abscisse du point de tangence, ici 2. Puis « ENTER ».

Casio 35+ : Touches « SHIFT » + « F4 » (Skech) puis « Tang » et saisir l'abscisse du point de tangence, ici 2. Puis « EXE » + « EXE ».



2) Équation de la tangente

Propriété : Une équation de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Méthode : Déterminer une équation d'une tangente à une courbe

Vidéo https://youtu.be/fKEGoo50Xmo
Vidéo https://youtu.be/7-z62dSkkTQ

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
Déterminer une équation de tangente à la courbe représentative de f au point de la courbe d'abscisse 2.

Correction
On a vu dans la méthode de la partie 1 que $f'(2) = 6$.
Donc une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2 est de la forme : $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$, soit : $y = 6(x - 2) + f(2)$
Soit encore :

$y = 6(x - 2) + 2^2 + 2 \times 2 - 3$
$y = 6x - 7$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point de la courbe d'abscisse 2 est $y = 6x - 7$.

3) Approximation affine d'une fonction

Au voisinage du point de coordonnées $(a\,;f(a))$, la tangente est une approximation affine de la courbe représentative de f.
Cela signifie que l'équation de la tangente permet d'obtenir des valeurs approchées d'images par f pour des valeurs proches de 2.

Exemple :
Dans l'exemple de la méthode précédente, on a :
$f(x) = x^2 + 2x - 3$
Tangente en 2 : $y = 6x - 7$

Il est possible de calculer une approximation de f au voisinage de 2 à l'aide de l'équation de la tangente.

On a par exemple :
$f(2{,}01) \approx 6 \times 2{,}01 - 7$ car l'équation de la tangente en 2 est $y = 6x - 7$.

Vérification :
$f(2{,}01) = 2{,}01^2 + 2 \times 2{,}01 - 3 = 5{,}0601$
et
$6 \times 2{,}01 - 7 = 5{,}06$
On constate donc que $f(2{,}01) \approx 6 \times 2{,}01 - 7$
La tangente permet ainsi d'obtenir une bonne approximation de f au voisinage de 2.