FONCTIONS POLYNÔMES DE DEGRÉ 3

Partie 1 : Définition

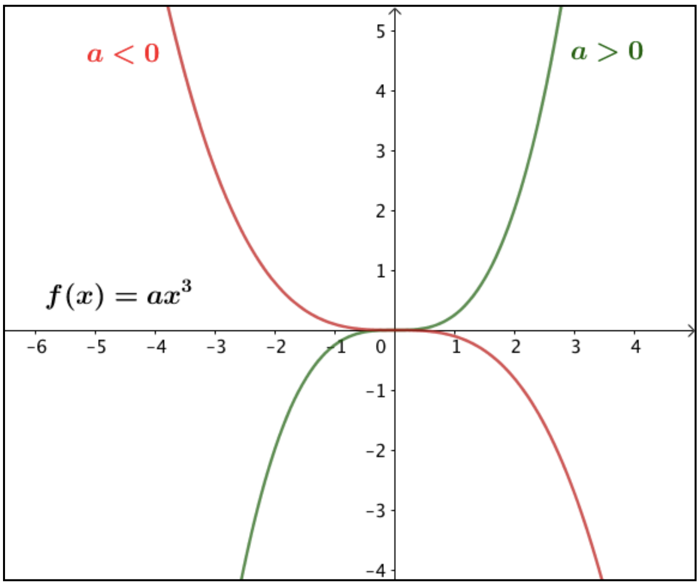
Exemples et contre-exemples :

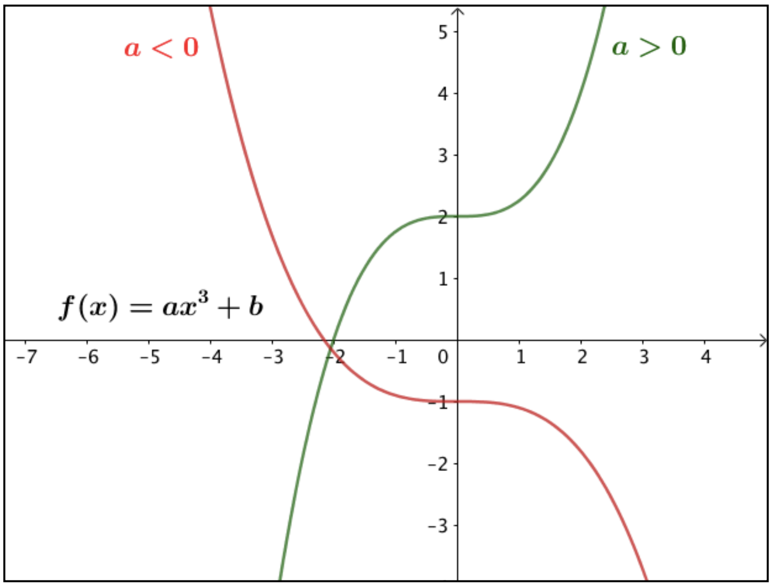
- $f(x) = 4x^3 + 1$
- $g(x) = x^3 - 2$ sont des fonctions polynômes de degré 3.
- $f(x) = 1 + x^2 - 2x^3$

- $m(x) = -x + 4$ est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).
- $n(x) = 2x^5 - x^3 + 5x - 1$ est une fonction polynôme de degré 5.

Définition : Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto ax^3$ ou $x \longmapsto ax^3 + b$ sont des **fonctions polynômes de degré 3**.
Les coefficients a et b sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Partie 2 : Représentation graphique





Propriétés :
Soit f une fonction polynôme de degré 3, telle que $f(x) = ax^3 + b$.
- Si $a > 0$: f est strictement croissante.
- Si $a < 0$: f est strictement décroissante.

Partie 3 : Forme factorisée d'une fonction polynôme de degré 3

Exemple :
La fonction f définie par $f(x) = 5(x-4)(x-1)(x+3)$ est une fonction polynôme de degré 3 sous sa forme factorisée.
Si on développe l'expression de f à l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient bien l'expression de degré 3 : $f(x) = 5x^3 - 10x^2 - 55x + 60$

Développer(5(x−4)(x−1)(x+3))

$\rightarrow\ 5\,x^3 - 10\,x^2 - 55\,x + 60$

Définition : Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ sont des fonctions polynômes de degré 3.
Les coefficients a, x_1, x_2 et x_3 sont des réels avec $a \neq 0$.

En partant de l'expression développée précédente, on peut vérifier que 4, 1 et –3 sont des racines du polynôme f.
$f(4) = 5 \times 4^3 - 10 \times 4^2 - 55 \times 4 + 60 = 320 - 160 - 220 + 60 = 0$
$f(1) = 5 \times 1^3 - 10 \times 1^2 - 55 \times 1 + 60 = 5 - 10 - 55 + 60 = 0$
$f(-3) = 5 \times (-3)^3 - 10 \times (-3)^2 - 55 \times (-3) + 60 = -135 - 90 + 165 + 60 = 0$

4, 1 et –3, solutions de l'équation $f(x) = 0$, sont donc des racines de f.

Propriété : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.
L'équation $f(x) = 0$ possède trois solutions (éventuellement égales) : $x = x_1$, $x = x_2$ et $x = x_3$ appelées les **racines** de la fonction polynôme f.

Méthode : Étudier le signe d'un polynôme de degré 3

Vidéo https://youtu.be/g0PfyqHSkBg

Étudier le signe de la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 2(x+1)(x-2)(x-5)$$

Correction
2 étant un nombre positif, le signe de $2(x+1)(x-2)(x-5)$ dépend du signe de chaque facteur : $x+1$, $x-2$ et $x-5$.
On étudie ainsi le signe de chaque facteur et on présente les résultats dans un tableau de signes.

$x + 1 = 0$ ou $x - 2 = 0$ ou $x - 5 = 0$
$x = -1$ $\quad$ $x = 2$ $\quad$ $x = 5$

-1, 2 et 5 sont donc les racines du polynôme f.

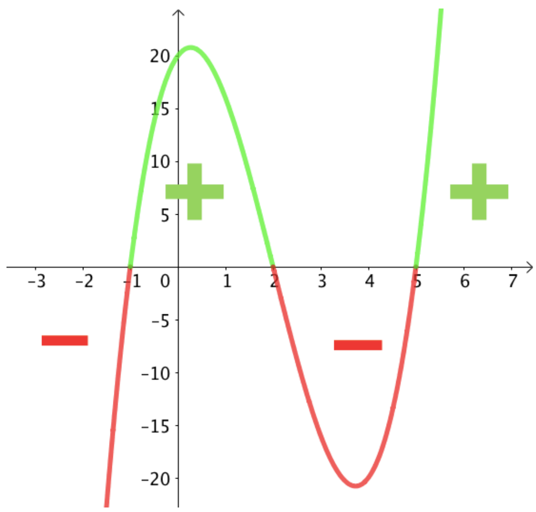
En appliquant la règle des signes dans le tableau suivant, on pourra en déduire le signe du produit $f(x) = 2(x+1)(x-2)(x-5)$.

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $f(x) \geq 0$ pour $x \in [-1\,;2] \cup [5\,;\,+\infty[$ et

$f(x) \leq 0$ pour $x \in]-\infty\,;\,-1] \cup [2\,;5]$.

La représentation de la fonction f à l'aide d'un logiciel permet de confirmer les résultats établis précédemment.



Partie 4 : Équation de la forme x³ = c

Propriété :
L'équation $x^3 = c$, avec c positif, possède une unique solution $\sqrt[3]{c}$.
Cette solution peut également se noter $c^{\frac{1}{3}}$.

Méthode : Résoudre une équation du type $x^3 = c$

Vidéo https://youtu.be/4tQJRkpIH3k

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : a) $x^3 = 27$, b) $2x^3 - 6 = 16$

Correction

a) On cherche le nombre qui, élevé au cube, donne 27.
Ce nombre est égal à la racine cubique de 27, soit : $x = \sqrt[3]{27} = 3$.

b) $2x^3 - 6 = 16$
$2x^3 = 16 + 6$
$2x^3 = 22$
$x^3 = 11$

L'équation admet donc une unique solution $x = \sqrt[3]{11}$.