FONCTIONS POLYNÔMES DE DEGRÉ 3

**Partie 1 : Définition**

Exemples et contre-exemples :

- $f\left(x\right)=4x^{3}+1$

- $g\left(x\right)=x^{3}-2$ sont des fonctions polynômes de degré 3.

- $f\left(x\right)=1+x^{2}-2x^{3}$

- $m\left(x\right)=-x+4$ est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).

- $n\left(x\right)=2x^{5}-x^{3}+5x-1$ est une fonction polynôme de degré 5.

Définition : Les fonctions définies sur $R$ par $x⟼ax^{3}$ ou $x⟼ax^{3}+b$ sont des **fonctions polynômes de degré 3**.

Les coefficients $a$ et $b$ sont des réels donnés avec $a\ne 0$.

**Partie 2 : Représentation graphique**



Propriétés :

Soit $f$ une fonction polynôme de degré 3, telle que$ f\left(x\right)=ax^{3}+b$.

- Si $a>0$ : $f$ est strictement croissante.

- Si $a<0$ : $f$ est strictement décroissante.

**Partie 3 : Forme factorisée d’une fonction polynôme de degré 3**

Exemple :

La fonction $f $définie par $f\left(x\right)=5\left(x-4\right)\left(x-1\right)\left(x+3\right)$ est une fonction polynôme de degré 3 sous sa forme factorisée.

Si on développe l’expression de $f $à l’aide d’un logiciel de calcul formel, on obtient bien l’expression de degré 3 : $f\left(x\right)=5x^{3}-10x^{2}-55x+60$



Définition : Les fonctions définies sur ℝ par $f\left(x\right)=a\left(x-x\_{1}\right)\left(x-x\_{2}\right)\left(x-x\_{3}\right)$ sont des fonctions polynômes de degré 3.

Les coefficients $a$, $x\_{1}$, $x\_{2}$ et $x\_{3}$ sont des réels avec $a\ne 0$.

En partant de l’expression développée précédente, on peut vérifier que 4, 1 et –3 sont des racines du polynôme $f$.

$$f\left(4\right)=5×4^{3}-10×4^{2}-55×4+60=320-160-220+60=0$$

$$f\left(1\right)=5×1^{3}-10×1^{2}-55×1+60=5-10-55+60=0$$

$$f\left(-3\right)=5×\left(-3\right)^{3}-10×\left(-3\right)^{2}-55×\left(-3\right)+60=-135-90+165+60=0$$

4, 1 et –3, solutions de l’équation $f\left(x\right)=0$, sont donc des racines de *f*.

Propriété : Soit la fonction $f$ définie sur ℝ par $f\left(x\right)=a\left(x-x\_{1}\right)\left(x-x\_{2}\right)\left(x-x\_{3}\right)$.

L’équation $f\left(x\right)=0$ possède trois solutions (éventuellement égales) :$ x=x\_{1}$, $x=x\_{2}$ et

$x=x\_{3}$ appelées les **racines** de la fonction polynôme *f*.

Méthode : Étudier le signe d’un polynôme de degré 3

 **Vidéo** [**https://youtu.be/g0PfyqHSkBg**](https://youtu.be/g0PfyqHSkBg)

Étudier le signe de la fonction polynôme $f$ définie sur ℝ par :

$$ f\left(x\right)=2\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-5\right)$$

**Correction**

2 étant un nombre positif, le signe de $2\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-5\right)$ dépend du signe de chaque facteur : $x+1$, $x-2$ et $x-5$.

On étudie ainsi le signe de chaque facteur et on présente les résultats dans un tableau de signes.

 $x+1=0$ ou $x-2=0$ ou $x-5=0$

 $ x = –1 $ $x=2 $ $x = 5$

–1, 2 et 5 sont donc les racines du polynôme $f$*.*

En appliquant la règle des signes dans le tableau suivant, on pourra en déduire le signe du produit $ f\left(x\right)=2\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-5\right)$.



On en déduit que $f(x)\geq 0$ pour $x\in \left[-1 ;2\right]∪\left[5 ; +\infty \right[$ et

$f(x)\leq 0$ pour $x\in \left]-\infty ; -1\right]∪\left[2 ;5\right]$.

La représentation de la fonction $f$ à l’aide d’un logiciel permet de confirmer les résultats établis précédemment.



**Partie 4 : Équation de la forme x3 = c**

Propriété :

L’équation $x^{3}=c$, avec *c* positif, possède une unique solution $\sqrt[3]{c}$.

Cette solution peut également se noter $c^{\frac{1}{3}}$.

Méthode : Résoudre une équation du type *x*3 = *c*

 **Vidéo** [**https://youtu.be/4tQJRkpIH3k**](https://youtu.be/4tQJRkpIH3k)

Résoudre dans ℝ les équations : a) $x^{3}=27$, b) $2x^{3}-6=16$

**Correction**

a) On cherche le nombre qui, élevé au cube, donne 27.

Ce nombre est égal à la racine cubique de 27, soit : $x=\sqrt[3]{27}=3$.

b) $2x^{3}-6=16$

$$2x^{3}=16+6$$

$$2x^{3}=22$$

$$x^{3}=11$$

L’équation admet donc une unique solution $x=\sqrt[3]{11}$.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)