CALCUL LITTÉRAL (Partie 1)

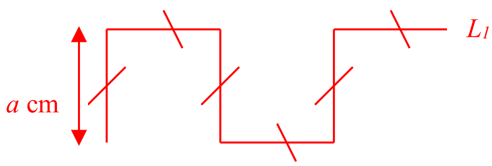
François Viète (1540,1603 ; conseiller d'Henri IV) est à l'origine du calcul avec des lettres.
L'idée était ingénieuse de considérer dans les calculs l'inconnue comme si elle était connue.
En 1580, Viète est nommé conseiller privé d'*Henri IV*. Il est chargé de décrypter les messages secrets interceptés que s'envoient les espagnols. Il y arrive systématiquement ce qui provoque l'exaspération de ses ennemis qui finissent par l'accuser de sorcellerie et le dénoncer au Pape.
Pour se défendre de ses accusateurs, Viète exposera en 1590 sa méthode dans un traité.

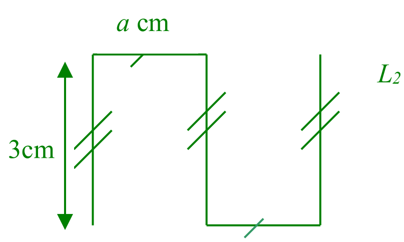
I. Expression littérale

Exemple d'introduction :

Vidéo https://youtu.be/bpYh7tvfl_Y

On considère les deux frises représentées ci-dessous.
Pour chacune d'elles, une longueur n'est pas connue. On choisit de la noter a.





1) Écrire une formule exprimant la longueur de la frise L_1 :

Comme on ne connaît pas la longueur a, le résultat n'est pas un nombre mais une expression en fonction de a : $L_1 = 6 \times a$

2) Même question pour L_2.

$$L_2 = 2 \times a + 9$$

Définition : Une **expression littérale** est un calcul contenant une ou plusieurs lettres qui désignent des nombres inconnus.

Méthode : Écrire une expression en fonction d'un nombre inconnu

On considère le programme de calcul :
- Choisir un nombre
- Ajouter 5
- Multiplier par 3
- Soustraire le double du nombre de départ.

1) Vérifier qu'en choisissant 1 au départ, on obtient 16 à la fin.
2) Qu'obtient-on en choisissant 3 au départ ?
3) Écrire une expression littérale correspondant à ce programme de calcul.

1) - Choisir un nombre → 1
- Ajouter 5 → 1 + 5 = 6
- Multiplier par 3 → 3 x 6 = 18
- Soustraire le double du nombre de départ → 18 – 2 x 1 = 16

2) - Choisir un nombre → 3
- Ajouter 5 → 3 + 5 = 8
- Multiplier par 3 → 3 x 8 = 24
- Soustraire le double du nombre de départ → 24 – 2 x 3 = 18

On obtient 18 à la fin.

3) - Choisir un nombre → x
- Ajouter 5 → $x + 5$
- Multiplier par 3 → $3 \times (x + 5)$
- Soustraire le double du nombre de départ. → $3 \times (x + 5) - 2 \times x$

Le programme de calcul correspond à l'expression : $3 \times (x + 5) - 2 \times x$

II. Simplifications d'écriture

1) Pour marquer la priorité de la multiplication, le symbole « × » peut être omis dans certains cas.

Vidéo https://youtu.be/eBPOd0bTBro

3 x a s'écrit 3a
a x b s'écrit ab
4 x (a – 2) s'écrit 4(a – 2)
15 + 4 x a s'écrit 15 + 4a

Notation introduite par l'allemand Michael Stifel en 1544

Attention : - 2 x 3 ne s'écrit pas 23 !
- on écrit 2a, on n'écrit pas a2

Le nombre s'écrit toujours devant la lettre.

2) Nombres au carré, nombres au cube :

Vidéo https://youtu.be/x35fh5SVRMQ

3 x 3 s'écrit 3^2
6 x 6 s'écrit 6^2
5 x 5 x 5 s'écrit 5^3

x x x s'écrit x^2 *et se lit « x au carré ».*
x x x x x s'écrit x^3 *et se lit « x au cube ».*

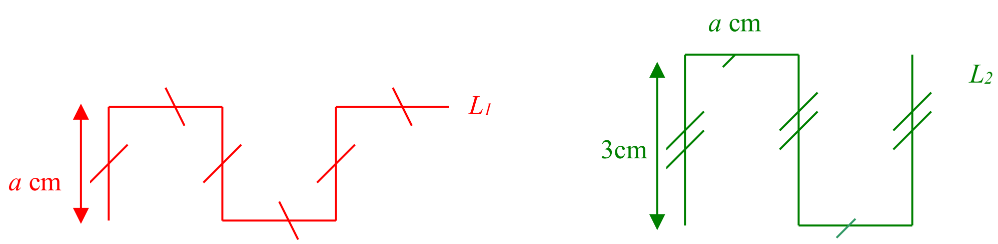
Notation introduite par René Descartes XVIIe

III. Appliquer une formule

Méthode : Appliquer une formule

Vidéo https://youtu.be/FOSVfFdDi7w

On considère les deux frises L_1 et L_2 étudiées dans le paragraphe *I*.



On a vu que : L_1 = 6 x a et L_2 = 2 x a + 9
Calculer L_1 et L_2 lorsque a = 4 cm.

Ici, a est connu, on peut donc remplacer a par 4 dans les deux formules :

L_1 = 6 x a = 6 x 4 = 24 cm

L_2 = 2 x a + 9 = 2 x 4 + 9 = 8 + 9 = 17 cm

IV. La distributivité

1) Formule de distributivité

« Calculer mentalement 24 x 101 ! On trouve 2424 !
Quelle méthode permet d'obtenir ce résultat rapidement ?»

On effectue : 24x (100 + 1) et…

$$24 \times (100 + 1) = \overset{\boxed{1}}{24 \times 100} + \overset{\boxed{2}}{24 \times 1}$$

Je distribue une multiplication par 24,
c'est la distributivité.

On dit que la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Ainsi : 24 x 101 = 2400 + 24 = 2424

Curiosité :
Si on traduit la formule de distributivité dans la langue française, cela pourrait donner ceci :

J'épluche et mange une banane
=
J'épluche une banane et je mange une banane

Sur une idée d'Adèle K.

Méthode : Appliquer la distributivité au calcul mental

Vidéo https://youtu.be/ByzozWOSOAY

Calculer astucieusement :
a) 32 x 101
b) 32 x 99
c) 13 x 102
d) 28 x 999
e) 131 x 13 + 131 x 87
f) 37 x 13 - 37 x 3

Astuce :
101 = 100 + 1
99 = 100 – 1
1010 = 1000 + 10
12 = 10 + 2
105 = 100 + 5

On connaît des règles de calcul mental pour multiplier par 10 par 100, par 1000, par 2, par 5, etc …
On décompose donc un des facteurs en somme ou différence formée de termes du type 10, 100, 1000, 1, 2, 5, …

a) 32 x 101 = 32 x (100 + 1)
= 32 x 100 + 32 x 1 ← On distribue
= 3200 + 32 = 3232

b) 32 x 99 = 32 x (100 – 1)
= 32 x 100 – 32 x 1 ← On distribue
= 3200 – 32 = 3168

c) 13 x 102 = *13 x (100 + 2)*
= *13 x 100 + 13 x 2*
= *1300 + 26 = 1326*

d) 28 x 999 = *28 x (1000 – 1)*
= *28 x 1000 – 28 x 1*
= *28000 – 28 = 27972*

Astuce :
On reconnaît un facteur commun pour appliquer la formule de distributivité.

e) **131 x** 13 + **131 x** 87 = **131 x** (13 + 87)
= 131 x 100 = 13100

f) **37 x** 13 – **37 x** 3 = **37 x** (13 – 3)
= 37 x 10
= 370

2) Réduire une expression

Méthode : Réduire une expression

Vidéo **https://youtu.be/qEUb4lU-HiY**

Réduire les expressions suivantes :

A = $4x + 3x$
B = $2{,}4x + 1{,}3x$
C = $2a + 4 – 3a + 6 – 2a + 8a – 8$

A = $4x + 3x = (4 + 3)x = 7x$

B = $2{,}4x + 1{,}3x = (2{,}4 + 1{,}3)x = 3{,}7x$

C = $2a + 4 – 3a + 6 – 2a + 8a – 8$
= $5a + 2$

1. Simplifier le plus possible l'écriture des expressions :

$4\times x$	$2\times(a+b)$	$3\times5+2\times a$
$5\times y$	$5\times(1-x)$	$5\times a-b\times4$
$a\times4$	$(6-x)\times6$	$3\times x+a\times5$
$15\times a$	$(x+1)\times2$	$7\times x-y\times2$
$4\times3\times a$	$2\times\left(4\times x+7\right)$	$a\times b-(5-a)\times9$
$5\times x\times3$	$4\times(a\times b-1)$	$x\times(6-x)+4\times x$

2. Même exercice :

$2\times x$	$4\times(a-b)$	$4\times5-7\times a+a\times c$
$y\times3$	$(4-x)\times7$	$5\times(4-3\times a)\times4$
$a\times b\times c$	$4\times5+5\times a$	$4\times(4-a)+a\times(8-4\times x)$
$4\times a\times5$	$a\times b-c\times d$	$8\times(7-3\times x)-4\times y\times t$
$4-3\times a$	$4\times x\times7-3$	$a\times b\times(c-d)+(2-a)\times3$
$5-x\times3$	$4-(a\times b+7)$	$x\times(5-x)\times6+4\times(2-x)$

3. Même exercice :

$x\times x$	$4(a\times a-3)$	$2\times(1-5\times x\times x)$
$2\times a\times a$	$a\times b\times b$	$5a\times a$
$b\times b\times b$	$x\times y\times x$	$xy\times xy$
$5a\times a\times a$	$x\times x\times y\times y$	$a\times4\times(6-a\times a)$
$8-a\times a$	$5\times2-x\times x$	$3\times8-a\times a\times7$
$3\times3-x\times x$	$a\times a+b\times b\times b$	$a\times2\times a\times2\times a$

4. Même exercice :

$a\times a$	$4\times(a\times a-3)$	$7\times(x-3\times x\times x)$
$2\times b\times b$	$a\times b\times a$	$7x\times x$
$c\times c\times c\times3$	$x\times y\times x\times y\times x$	$ab\times ab$
$a\times a+b\times b$	$x\times x\times(y-4\times x)$	$x\times a\times(c-c\times c)$
$4-a\times a$	$4\times3-x\times x\times3$	$7\times6-a\times a\times3$
$4\times4-b\times b$	$x\times x+x\times x\times x$	$a\times b\times a\times b\times a$