CALCUL ALGEBRIQUE

Tout le cours sur les développements en vidéo : https://youtu.be/gSa851JJn6c
Tout le cours sur les factorisations en vidéo : https://youtu.be/kQGWtMOHbrA

I. Somme de termes et produit de facteurs

Vidéo https://youtu.be/FTi9WOQsq3w

1. Exemples :

Sommes (ou différences) de termes	Produits de facteurs
$x-3$ $(2x+4)+3x$ $(5-x)-(9+9x)$ $3+(2+3x)(x-2)$	$(6x+1)(x-1)$ $2(1+6x)$ $(8-x)(2+x)$ $(3+8x)(x-8)^2$

Remarque :
$\frac{3}{2-x}$ est appelé un quotient. C'est le produit de 3 et de l'inverse de $2-x$.

2. Valeurs « interdites » :

Pour certaines expressions dépendantes de x, il existe des valeurs de x pour lesquelles on ne peut pas calculer l'expression.

Exemple : Soit $A(x) = \frac{x+5}{4+x}$.
Pour x = -4, 4 + x = 0.
Il n'est donc pas possible de calculer A(-4).
Pour l'expression $A(x)$, x désigne un nombre réel différent de -4.

II. Développer et factoriser

1. Distributivité

Définitions :
Développer c'est transformer un produit en une somme (ou différence) de termes.
Factoriser c'est transformer une somme en un produit de facteurs.

Exemple :

DEVELOPPER

$$x(4-y) = 4x - xy$$

FACTORISER

On dit que la multiplication est *distributive* par rapport à l'addition (ou la soustraction).
Dans l'exemple, on a *distribué* la multiplication par x sur les termes *4* et y.

Méthode : Développer une expression

Vidéo https://youtu.be/S_ckQpWzmG8
Vidéo https://youtu.be/URNId8xsXgM

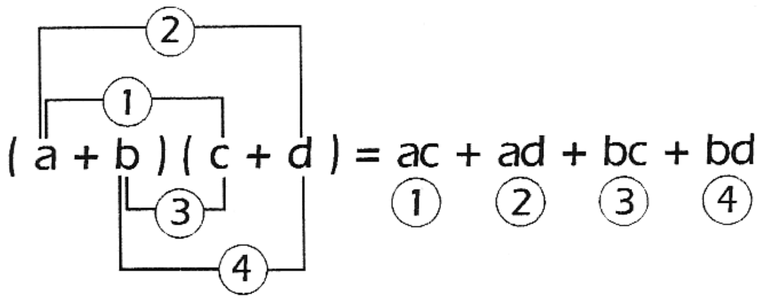
Développer les expressions suivantes :

a) $2(3 + y)$ b) $-5(x - y)$ c) $-3(-2x + y)$ d) $x(-4 - y)$
e) $2x(x - y + 4)$ f) $(-4 + x) \times 5$ g) $-(3 - x)$ h) $+(-1 + x) = -1 + x$

a) $2(3 + y) = 6 + 2y$
b) $-5(x - y) = -5x + 5y$
c) $-3(-2x + y) = 6x - 3y$
d) $x(-4 - y) = -4x - xy$
e) $2x(x - y + 4) = 2x^2 - 2xy + 8x$
f) $(-4 + x) \times 5 = -20 + 5x$
g) $-(3 - x) = -3 + x$ *On dit que* $3 - x$ *et* $-3 + x$ *sont opposés.*
h) $+(-1 + x) = -1 + x$

2. Double-distributivité

Propriété :



Méthode : Appliquer la double distributivité pour développer

Vidéo https://youtu.be/YS-3JI_z2f0
Vidéo https://youtu.be/1EPOmbvoAIU
Vidéo https://youtu.be/SH1hQrsZGsk
Vidéo https://youtu.be/o6qVMmA3oTQ

Développer et réduire si possible :

$A = (x + 3)(y + 2)$ $B = (3 - 2x)(4 - x)$ $C = 2(3 + x)(3 - x)$
$D = 2x(1 - x) - (x - 3)(3x + 2)$ $E = (x + 2)(4x - 3) - x(7 - x)$

A = $xy + 2x + 3y + 6$

B = $12 - 3x - 8x + 2x^2$
= $2x^2 - 11x + 12$

C = $2(9 - 3x + 3x - x^2)$
= $18 - 6x + 6x - 2x^2$
= $-2x^2 + 18$

D = $2x(1 - x) \quad - (x - 3)(3x + 2)$
= $2x - 2x^2 \quad - (3x^2 + 2x - 9x - 6)$
= $2x - 2x^2 \quad - 3x^2 - 2x + 9x + 6$
= $-5x^2 + 9x + 6$

E = $(x + 2)(4x - 3) - x(7 - x)$
= $4x^2 - 3x + 8x - 6 - 7x + x^2$
= $5x^2 - 2x - 6$

3. Factoriser

Méthode : Factoriser une expression (1)

Vidéo https://youtu.be/r3AzqvgLcI8

Pour factoriser, il faut trouver dans l'expression un facteur commun.

Trouver le facteur commun de ces expressions, puis factoriser et réduire si possible:

A = $3,5x - 4,2x + 2,1x$
B = $4t - 5tx + 3t$
C = $4x - 4y + 8$
D = $x^2 + 3x - 5x^2$
E = $3t + 9u + 3$
F = $3x - x$

A = $3,5x - 4,2x + 2,1x$
= $x(3,5 - 4,2 + 2,1)$
= $1,4x$

C = $4x - 4y + 4 \times 2$
= $4(x - y + 2)$

E = $3t + 3 \times 3u + 3 \times 1$
= $3(t + 3u + 1)$

B = $4t - 5tx + 3t$
= $t(4 - 5x + 3)$
= $t(7 - 5x)$

D = $x \times x + 3x - 5x \times x$
= $x(x + 3 - 5x)$
= $x(-4x + 3)$

F = $3x - 1x$
= $x(3 - 1)$
= $2x$

Méthode : Factoriser une expression (2)

Vidéo https://youtu.be/UGTFELhE9Dw

Factoriser les expressions suivantes :

A = $3(2 + 3x) - (5 + 2x)(2 + 3x)$
B = $(2 - 5x)^2 - (2 - 5x)(1 + x)$
C = $5(1 - 2x) - (4 + 3x)(2x - 1)$
D = $3x^2 - x$

Pour factoriser, il faut trouver dans chacun des termes de l'expression un facteur commun. Il s'agit ici de $2 + 3x$.

A $= 3(2 + 3x) - (5 + 2x)(2 + 3x)$
$= (2 + 3x)(3 - (5 + 2x))$
$= (2 + 3x)(3 - 5 - 2x)$
$= (2 + 3x)(-2 - 2x)$

B $= (2 - 5x)^2 - (2 - 5x)(1 + x)$
$= (2 - 5x)(2 - 5x) - (2 - 5x)(1 + x)$
$= (2 - 5x)((2 - 5x) - (1 + x))$
$= (2 - 5x)(2 - 5x - 1 - x)$
$= (2 - 5x)(1 - 6x)$

Lorsque le facteur commun n'est pas immédiatement apparent, il est parfois possible de modifier l'écriture d'un des termes de l'expression pour faire apparaître un facteur commun :

C $= 5(1 - 2x) - (4 + 3x)(2x - 1)$
$= 5(1 - 2x) + (4 + 3x)(1 - 2x)$
$= (1 - 2x)(5 + (4 + 3x))$
$= (1 - 2x)(9 + 3x)$

D $= 3x^2 - x$
$= 3x^2 - x \times 1$
$= x(3x - 1)$

III. Identités remarquables

Propriété :

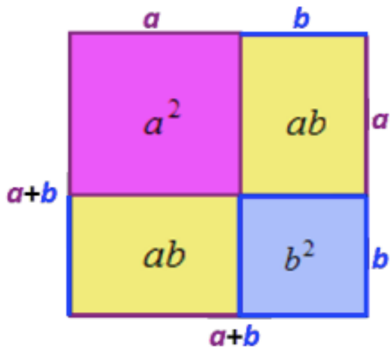
Pour tous nombres réels a et b, on a :

DEVELOPPER

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

FACTORISER

Illustration géométrique de la 1ère identité remarquable :
En considérant les aires dans le carré, on a : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



Vidéo https://youtu.be/wDAdBXIZNK4

Exemples :

Vidéo https://youtu.be/A8U1QVW7RaU

$(x - 5)^2 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$
$(2x - 1)(2x + 1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1.$
$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2 = (x + 3)^2$

1) Les identités remarquables pour développer

Méthode : Appliquer les identités remarquables pour développer (1)

Vidéo https://youtu.be/6j0oMQlaBYg
Vidéo https://youtu.be/U98Tk89SJ5M

Développer et réduire éventuellement :

A = $(x + 3)^2$ B = $(4 - 3x)^2$ C = $(x - 3)(x + 3)$
D = $(2x + 3)(2x - 3)$ E = $(4 - 3x)(3x + 4)$

$A = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ $\quad$ 2ab = 2 x x x 3

$B = (4 - 3x)^2 = 16 - 24x + (3x)^2$ $\quad$ 2ab = 2 x 4 x $3x$
$= 9x^2 - 24x + 16$

$C = (x - 3)(x + 3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

$D = (2x + 3)(2x - 3) = 4x^2 - 9$

$E = (4 - 3x)(3x + 4) = (4 - 3x)(4 + 3x) = 4^2 - (3x)^2 = 16 - 9x^2$

Méthode : Appliquer les identités remarquables pour développer (2)

Vidéo https://youtu.be/7va96s4OfiM

Développer et réduire en utilisant les identités remarquables :

A = $(2x - 3)^2 + (x + 5)(3 - x)$
B = $(x - 3)(x + 3) - (4 - 3x)^2$
C = $2(x + 3) + (2x + 3)(2x - 3)$

$A = (2x - 3)^2 + (x + 5)(3 - x)$
$= 4x^2 - 12x + 9 + 3x - x^2 + 15 - 5x$
$= 3x^2 - 14x + 24$

$B = (x - 3)(x + 3) - (4 - 3x)^2$
$= x^2 - 9 - (16 - 24x + 9x^2)$
$= x^2 - 9 - 16 + 24x - 9x^2$
$= -8x^2 + 24x - 25$

$C = 2(x + 3) + (2x + 3)(2x - 3)$
$= 2x + 6 + (2x)^2 - 3^2$
$= 2x + 6 + 4x^2 - 9$
$= 4x^2 + 2x - 3$

2) Les identités remarquables pour factoriser

Méthode : Factoriser en appliquant les identités remarquables (1)

Vidéo https://youtu.be/5dCsR85qd3k

Factoriser :

$A = x^2 - 2x + 1$
$B = 4x^2 + 12x + 9$
$C = 9x^2 - 4$
$D = 25 + 16x^2 - 40x$
$E = 1 - 49x^2$
$F = 12t + 4 + 9t^2$

Retrouvons les termes : a^2 b^2 $2ab$ dans les expressions

$A = x^2 - 2x + 1$ (2ème I.R. avec $a = x$ et $b = 1$)
$= (x - 1)^2$

$B = 4x^2 + 12x + 9$ (1ère I.R. avec $a = 2x$ et $b = 3$)
$= (2x + 3)^2$

$C = 9x^2 - 4$ (3ème I.R. avec $a = 3x$ et $b = 2$)
$= (3x - 2)(3x + 2)$

$D = 25 + 16x^2 - 40x$ (2ème I.R. avec $a = 5$ et $b = 4x$)
$= (5 - 4x)^2$

$E = 1 - 49x^2$ (3ème I.R. avec $a = 1$ et $b = 7x$)
$= (1 - 7x)(1 + 7x)$

$F = 12t + 4 + 9t^2$ (1ère I.R. avec $a = 2$ et $b = 3t$)
$= (2 + 3t)^2$

Méthode : Factoriser en appliquant les identités remarquables (2)

Vidéo https://youtu.be/nLRRUMRyfZg
Vidéo https://youtu.be/tO4p9TzMrls

Factoriser et réduire :

$G = (2x + 3)^2 - 64$ $H = 1 - (2 - 5x)^2$

$G = (2x + 3)^2 - 64$ (3ème I.R. avec $a = 2x + 3$ et $b = 8$)
$= ((2x + 3) - 8)((2x + 3) + 8)$
$= (2x + 3 - 8)(2x + 3 + 8)$
$= (2x - 5)(2x + 11)$

H = 1 – $(2 – 5x)^2$ (3ème I.R. avec a = 1 et b = 2 – $5x$)
= $(1 – (2 – 5x))(1 + (2 – 5x))$
= $(1 – 2 + 5x)(1 + 2 – 5x)$
= $(–1 + 5x)(3 – 5x)$

IV. Réduire au même dénominateur

Définition :
Réduire au même dénominateur c'est transformer une somme (ou une différence) de deux fractions en une seule fraction.

Propriété :
Pour tout nombre *a, b, c* et *d*, réels on a :
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$$

Méthode : Réduire au même dénominateur

Vidéo https://youtu.be/Id_udNTKsqI

Réduire les expressions suivantes au même dénominateur :
$$A=\frac{7x}{x-2}-\frac{5}{3-x} \qquad B=3+\frac{5x}{2x+1}$$

$$A=\frac{7x}{x-2}-\frac{5}{3-x}$$
$$=\frac{7x(3-x)}{(x-2)(3-x)}-\frac{5(x-2)}{(3-x)(x-2)}$$
$$=\frac{7x(3-x)-5(x-2)}{(x-2)(3-x)}$$
$$=\frac{21x-7x^2-5x+10}{(x-2)(3-x)}$$
$$=\frac{-7x^2+16x+10}{(x-2)(3-x)}$$

$$B=3+\frac{5x}{2x+1}$$
$$=\frac{3}{1}+\frac{5x}{2x+1}$$
$$=\frac{3(2x+1)}{2x+1}+\frac{5x}{2x+1}$$
$$=\frac{3(2x+1)+5x}{2x+1}$$
$$=\frac{6x+3+5x}{2x+1}$$
$$=\frac{11x+3}{2x+1}$$