

ARITHMÉTIQUE

▶ Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/al9oHwrITNo>

Le mot vient du grec « arithmos » = nombre. En effet, l'arithmétique est la science des nombres. Citons la célèbre conjecture de Goldbach énoncée en 1742 et à ce jour jamais démontrée : « Tout nombre entier pair est la somme de deux nombres premiers »

I. Divisibilité

1) Rappels : Les critères de divisibilité

Un nombre entier est divisible :

- par 2, si son chiffre des unités est pair,
- par 5, si son chiffre des unités est 0 ou 5,
- par 10, si son chiffre des unités est 0,
- par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3,
- par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.



Exemples :

- 1) 30 est divisible par 2, 5, 10 et 3.
- 2) 1071 est divisible par 3 et 9
Car $1+0+7+1 = 9$. Et 9 est divisible par 3 et par 9.

Problème de divisibilité :

▶ Vidéo <https://youtu.be/QoRWa45dQig>

2) Nombres premiers

Définition : Un nombre est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs qui sont 1 et lui-même.

Exemples :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... Cette liste est infinie.

Remarque :

Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

▶ Vidéo https://youtu.be/N1gY8G_Y5k4

Divertissement :

Le nombre 73939133 est un nombre premier. Si on retire à chaque fois son dernier chiffre, il reste premier.

Ainsi,
73939133
7393913
739391
73939
7393
739
73
7
sont tous premiers.

III. Application aux fractions

1) Décomposition d'un nombre en produits de facteurs premiers

Exemples :

- $20 = 2 \times 2 \times 5$ est une décomposition du nombre 20 en produits de facteurs premiers.

En effet, **chaque facteur** de la décomposition est un **nombre premier**.

- $231 = 3 \times 7 \times 11$

- $225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$

Propriété :

Tout nombre non premier peut se décomposer en produits de facteurs premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Méthode : Décomposer un nombre en produits de facteurs premiers

 Vidéo <https://youtu.be/RBE2wPIKagI>

Décomposer 300 en produits de facteurs premiers.

Pour le faire, il est important de bien connaître le début de la liste des nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

On commence par tester si **300** est **divisible par 2** (1^{er} nombre premier).

La réponse est « oui » car **300** se termine par un chiffre pair.

Et on a : $300 : 2 = 150$

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & \end{array}$$

On recommence, en testant si **150** est **divisible par 2**.

La réponse est « oui » et $150 : 2 = 75$

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & \end{array}$$

On recommence, en testant si **75** est divisible par 2.

La réponse est « non » !

On teste alors le nombre premier suivant dans la liste.

Est-ce que **75** est **divisible par 3**.

La réponse est « oui » car $7+5=12$ est divisible par 3.

Et on a : $75 : 3 = 25$

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & \end{array}$$

On recommence, en testant si **25** est divisible par 3.

La réponse est « non » !

On teste alors le nombre premier suivant dans la liste.

Est-ce que **25** est **divisible par 5**.

La réponse est « oui » et on a $25 : 5 = 5$.

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & \end{array}$$

On recommence, en testant si **5** est **divisible par 5**.

La réponse est « oui » et on a $5 : 5 = 1$.

C'est fini, on trouve **1** !

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

La décomposition en facteurs premiers de 300 se lit dans la colonne de droite.

$$300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$$

2) Fraction irréductible

Définition : On dit qu'une fraction est **irréductible**, lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Méthode : Rendre une fraction irréductible

 Vidéo <https://youtu.be/qZaTliAWkA0>

Rendre irréductible la fraction $\frac{60}{126}$.

Pour rendre une fraction irréductible, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

On a ainsi les décompositions de 60 et 126 : $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ et $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

On a : $\frac{60}{126} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 3 \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$.
10 et 21 n'ont pas de diviseur commun.

$\frac{10}{21}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{60}{126}$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales