ÉQUATIONS

TP info : Al Khwarizmi
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Alkhwa_Rech.pdf

La méthode de résolution des équations (*muadala*) découverte par le perse *Abu Djafar Muhammad ibn Musa* ***al Khwarizmi*** (Bagdad, 780-850) consiste en :
- **al jabr** (le reboutement, 4x - 3 = 5 devient 4x = 5 + 3), le mot est devenu "algèbre" aujourd'hui. Dans l'équation, un terme négatif est accepté mais *al Khwarizmi* s'attache à s'en débarrasser au plus vite. Pour cela, il ajoute son opposé des deux côtés de l'équation.
- **al muqabala** (la réduction, 4x = 9 + 3x devient x = 9)

Les termes semblables sont réduits.
A cette époque, la « famille des nombres » est appelée *dirham* et la « famille des *x* » est appelée *chay* (=chose), devenu plus tard *xay* en espagnol qui explique l'origine du *x* dans les équations.

I. Notion d'équation

1) Vocabulaire

INCONNUE : c'est une lettre qui cache un nombre cherché :
$\rightarrow \quad x$

EQUATION : c'est une opération « à trous » dont « les trous » sont remplacés par une inconnue : $\rightarrow \quad 10x-2=2x+3$

RESOUDRE UNE EQUATION : c'est chercher et trouver le nombre caché sous l'inconnue.

SOLUTION : c'est le nombre caché sous l'inconnue :
$\rightarrow x=0{,}625$

Vérification :
10 x 0,625 - 2 = 2 x 0,625 + 3, donc 0,625 est solution.

Méthode : Vérifier si un nombre est solution d'une équation

Vidéo https://youtu.be/PLuSPM6rJKI

Vérifier si 14 est solution de l'équation $4(x-2)=3x+6$

$4(x-2)=$ 4 (14 - 2) = 4 x 12 = 48 et $3x+6=$ 3 x 14 + 6 = 42 + 6 = 48
14 vérifie l'équation $4(x-2)=3x+6$ donc 14 est solution !

Exercices conseillés	En devoir
Ex 1 (Page 8 de ce document) p88 n°71	p88 n°74

Myriade 3^e – Bordas Éd.2016

TP info : « Recherche de la solution d'une équation »
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Rech_sol.pdf
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Rech_sol.ods (Feuille de calcul OOo)

II. Résolution d'équations

1) Introduction

Soit l'équation : $2x + 5x - 4 = 3x + 2 + 3x$

But : Trouver x !
C'est-à-dire : isoler x dans l'équation pour arriver à :
x = nombre

Les différents éléments d'une équation sont liés ensemble par des opérations.
Nous les désignerons « liens faibles » (+ et -) et « liens forts » (x et :). Ces derniers marquent en effet une priorité opératoire. Pour signifier que le lien est fort, le symbole « x » peut être omis.
Dans l'équation ci-dessus, par exemple, $2x$ et $5x$ sont juxtaposés par le lien faible « − ». Par contre, 2 et x sont juxtaposés par un lien fort « x » qui est omis.

Dans l'équation $2x + 5x - 4 = 3x + 2 + 3x$, on reconnaît des membres de la famille des x et des membres de la famille des nombres juxtaposés par des « liens faibles ».

Pour obtenir « x = nombre », on considèrera que la famille des x habite à gauche de la « barrière = » et la famille des nombres habite à droite.
Résoudre une équation, c'est clore deux petites réceptions où se sont réunis des x et des nombres. Une se passe chez les x et l'autre chez les nombres. La fête est finie, chacun rentre chez soi.
On sera ainsi menés à effectuer des mouvements d'un côté à l'autre de la « barrière = » en suivant des règles différentes suivant que le lien est fort ou faible.

2) Avec « lien faible »

Le savant perse Abu Djafar Muhammad ibn Musa ***al Khwarizmi*** *(Bagdad, 780-850) est à l'origine des méthodes appelées « al jabr » (=le reboutement ; le mot est devenu "algèbre" aujourd'hui) et « al muqabala » (=la réduction).*

Elles consistent en :
- ***al jabr :***
Dans l'équation, un terme négatif est accepté mais al Khwarizmi *s'attache à s'en débarrasser au plus vite. Pour cela, il ajoute son opposé des deux côtés de l'équation.*
Par exemple : $4x - 3 = 5$ *devient* $4x - 3 + 3 = 5 + 3$ *soit* $4x = 5 + 3$.

- al muqabala :
Les termes positifs semblables sont réduits.
Par exemple : $4x = 9 + 3x$ devient $x = 9$. On soustrait $3x$ de chaque côté de l'égalité.

Méthode : Résoudre une équation (1)

Vidéo https://youtu.be/uV_EmbYu9_E

Résoudre : $2x + 5x - 4 = 3x + 2 + 3x$

1ere étape : *chacun rentre chez soi !*

$2x + 5x - 4 \qquad = 3x + 2 + 3x$
$2x + 5x - 3x - 3x = \quad + 2 + 4$

2^{e} étape : *réduction (des familles)*

$x = 6$

Pour un lien faible, chaque déplacement par dessus « la barrière = » se traduit par un changement de signe de l'élément déplacé.

Exercices conseillés	En devoir
p80 n°2 Ex 2, 4 (Page 8)	Ex 3 (Page 8)

Myriade 3^{e} – Bordas Éd.2016

3) Avec « lien fort »

La méthode qui s'appelait « al hatt » consistait à diviser les deux membres de l'équation par un même nombre.

Méthode : Résoudre une équation (2)

Vidéo https://youtu.be/mK8Y-v-K0cM

Résoudre les équations suivantes :

1) $2x = 6$ 2) $\dfrac{x}{-3} = 4$ 3) $\dfrac{7}{9}x = -2$

1) $2x = 6$

$x = \dfrac{6}{2}$

$x = 3$

2) $\dfrac{x}{-3} = 4$

$x = 4 \times (-3)$

$x = -12$

3) $\dfrac{7}{9}x = -2$

$x = -2 \times \dfrac{9}{7}$

$x = -\dfrac{18}{7}$

Pour un lien fort, chaque déplacement par dessus « la barrière = » se traduit par une « inversion » de l'élément déplacé.

Exercices conseillés	En devoir
Ex 5, 6, 7 (Page 8)	p80 n°3

Myriade 3^{e} – Bordas Éd.2016

4) Avec les deux

Méthode : Résoudre une équation (3)

Vidéo https://youtu.be/QURskM271bE

Résoudre : $4x+5-3x-4=3x+2+x$

$$4x+5-3x-4=3x+2+x$$
$$4x-3x-x-3x=2+4-5$$
$$-3x=1$$
$$x=\frac{1}{-3}$$
$$x=-\frac{1}{3}$$

Exercices conseillés	En devoir
p80 n°6, 8, 9 p88 n°72 p81 n°11, 12 p83 n°31	p80 n°7

Myriade 3e – Bordas Éd.2016

5) Avec des parenthèses

Méthode :

Vidéo https://youtu.be/quzC5C3a9jM

Résoudre : $2(x+3)=-(x+3)$

$2(x+3)=-(x+3)$

$2x+6=-x-3$ ← 1.

$2x+x=-3-6$ ← 2.

$3x=-9$ ← 3.

$x=\frac{-9}{3}$ ← 4.

$x=-3$ ← 5.

Etapes successives :

1. Se débarrasser des parenthèses
2. Chacun rentre chez soi : liens faibles
3. Réduction
4. Casser le dernier lien fort
5. Simplification (si besoin)

Exercices conseillés	En devoir
Ex 8, 9 (Page 8) p88 n°73 p82 n°22	p273 n°10 Equations

Myriade 3[e] – Bordas Éd.2016

Comment en est-on arrivé là ?

	Aujourd'hui	$4x^2 + 3x - 10 = 0$
René Descartes	***Vers 1640***	*4xx + 3x ∞ 10*
François Viète	***Vers 1600***	***4 in A quad + 3 in A aequatur 10***
Simon Stevin	***Fin XVIe***	***4② + 3① egales 10⓪***
Tartaglia	***Début XVIe***	***4q p 3R equale 10N***
Nicolas Chuquet	***Fin XVe***	***4^2 p 3^1 egault 10^0***
Luca Pacioli	***Fin XVe***	***Quattro qdrat che gioto agli tre n^0 facia 10*** **(traduit par 4 carrés joints à 3 nombres font 10)**
Diophante	***IIIe***	*$\Delta^Y \delta$ ζγ εστι ι* **(traduit par inconnue carré 4 et inconnue 3 est 10)**
Babyloniens et Egyptiens	***IIe millénaire avant J.C.***	***Problèmes se ramenant à ce genre d'équation.***

III. Equation produit

Si a x b = 0, que peut-on dire de a et b ?
« Faire des essais sur des exemples, puis conclure … ! »

Propriété : Si a x b = 0 alors a = 0 ou b = 0.
Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Méthode : Résoudre une équation-produit

Vidéo https://youtu.be/APj1WPPNUgo

Résoudre les équations :

a) $(4x + 6)(3 - 7x) = 0$ b) $4x^2 + x = 0$ c) $x^2 - 25 = 0$

a) Si un produit de facteur est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Alors : $4x + 6 = 0$ ou $3 - 7x = 0$

$4x = -6$ $\qquad -7x = -3$

$x = -\frac{6}{4}$ $\qquad x = \frac{-3}{-7}$

$x = -\frac{3}{2}$ $\qquad x = \frac{3}{7}$ $\qquad S = \left\{-\frac{3}{2} ; \frac{3}{7}\right\}$

b) $4x^2 + x = 0$

$x(4x + 1) = 0$

Si un produit de facteur est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Alors : $x = 0$ ou $4x + 1 = 0$

$4x = -1$

$x = -\frac{1}{4}$

$S = \left\{-\frac{1}{4} ; 0\right\}$

c) $x^2 - 25 = 0$

$(x - 5)(x + 5) = 0$

Si un produit de facteur est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Alors : $x - 5 = 0$ ou $x + 5 = 0$

$x = 5$ $x = -5$

$S = \{-5 ; 5\}$

Exercices conseillés	En devoir
p82 n°20 Ex 10, 11, 12 (Page 10) p88 n°75 p82 n°21, 25, 24	p273 n°11 Equations-produits

Myriade 3e – Bordas Éd.2016

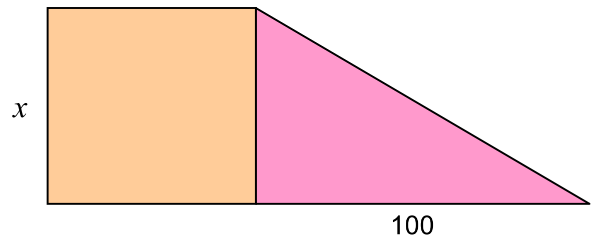
IV. Application à la résolution de problèmes

Méthode : Mettre un problème en équation (2)

Vidéo https://youtu.be/fIObKE_CyHw

Deux agriculteurs possèdent des champs ayant un côté commun de longueur inconnue. L'un est de forme carré, l'autre à la forme d'un triangle rectangle de base 100m. Sachant que les deux champs sont de surface égale, calculer leurs dimensions.

On désigne par x la longueur du côté commun.
Les donnés sont représentés sur la figure suivante :



L'aire du champ carré est égale à x^2.

L'aire du champ triangulaire est égale à $\frac{100x}{2} = 50x$

Les deux champs étant de surface égale, le problème peut se ramener à résoudre l'équation : $x^2 = 50x$

Soit $x^2 - 50x = 0$

$x(x - 50) = 0$

Si un produit de facteurs est nul alors l'un au moins des facteurs est nul.

Alors $x = 0$ ou $x - 50 = 0$

$x = 0$ ou $x = 50$

La première solution ne convient pas à la situation du problème, on en déduit que le premier champ est un carré de côté de longueur 50m et le deuxième est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesure 100m et 50m.

Exercices conseillés	En devoir
p81 n°15, 16 p88 n°76, 77 p90 n°94 p91 n°97 p83 n°33 p89 n°78	p89 n°79

Myriade 3^e^ – Bordas Éd.2016

Activité de groupe : Moquettes !
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/MOQUETTES.pdf

EXERCICE 1
Vérifier si les nombres suivants sont solutions de l'équation $6x^2+6x-36=0$:

10 ; 2 ; 0 ; -3 ; -5

EXERCICE 2
Résoudre les équations :

a) $4x-5=6+3x$ b) $7x-3=-4+6x$ c) $10x-6=5+9x+1$

EXERCICE 3
Résoudre les équations :

a) $5x=1+4x$ b) $3-4x+5=-5x$ c) $-x-6=4-2x+1$

EXERCICE 4
Résoudre les équations :

a) $5x-4+6x=5+10x$ b) $3-x+5=-3x-5+x$ c) $7x-6=3-2x-1+8x$

EXERCICE 5
Résoudre les équations :

a) $14x=7$ b) $7x=8$ c) $12t=48$ d) $5x=16$ e) $-3t=27$

EXERCICE 6
Résoudre les équations :

a) $-4x=5$ b) $-2x=-6$ c) $\frac{1}{3}y=5$ d) $\frac{x}{2}=25$ e) $-3t=-45$

EXERCICE 7
Résoudre les équations :

a) $8=4y$ b) $-10x=100$ c) $\frac{4}{-5}x=2$ d) $\frac{2}{3}x=9$ e) $\frac{8}{7}x=14$

EXERCICE 8
Résoudre les équations :

a) $3(x-5)+(8x+2)=7x-9$ b) $2(x-3)-(x+5)=4$ c) $3(x+1)-2(3x+3)=0$

EXERCICE 9
Résoudre les équations :

$a)$ $2x-8(x-4)=8x+6-7+4x$

$b)$ $-(x+5)=5(1-2x)$

$c)$ $9x-7x+5-9x=6-4x+8x$

$d)$ $6(3y-5)=-(-5-y)$

$e)$ $7x-2x+2x-9+7x=14x$

$f)$ $-(18-x)+7(3x+5)=-(2-4x)$

EXERCICE 10
Résoudre les équations-produits :

a) $(4x-4)(8x+2)=0$
b) $(x-6)(x+3)=0$
c) $(x+2)(3x+3)=0$
d) $(x-5)(6x-12)=0$
e) $(x-3)(x+1)=0$
f) $(x+6)(3x-4)=0$

EXERCICE 11
Résoudre les équations-produits :

a) $(3x+9)(x-2)=0$
b) $(4x+6)(7x-49)=0$
c) $(3x+12)(2+3x)=0$
d) $(6x+10)(1-2x)=0$
e) $(x-3)(3x-x)=0$
f) $(x-6)(3x+4)=0$

EXERCICE 12
Résoudre les équations-produits :

a) $(7x+4)(1-x)=0$
b) $2(x-6)(6-3x)=0$
c) $(3x-15)(11x+11)=0$
d) $3(x-5)(6x+12)=0$
e) $4(1-2x)(6x-12)=0$
f) $-(x+1)(2x-4)=0$