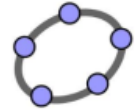


APPROXIMATION D'UNE INTEGRALE PAR LA METHODE DES RECTANGLES



Certaines fonctions ne possèdent pas de primitives qui peuvent s'écrire à l'aide d'une fonction. C'est par exemple le cas de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-x^2}$.

Le but de cette activité est d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$.

PARTIE A : Avec un logiciel de géométrie dynamique

1) Avec le logiciel :

- Tracer la fonction f .
- Créer un curseur n prenant les valeurs entières de 1 à 100.
- Saisir « **s_n=sommeinférieure(f,0,1,n)** ».

Le logiciel crée ainsi n rectangles sous la courbe de f .

2) Justifier que l'aire grisée, somme des aires des rectangles R_k , est égale à :

$$s_n = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right]$$

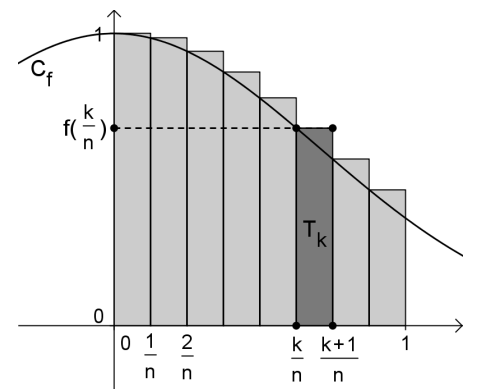
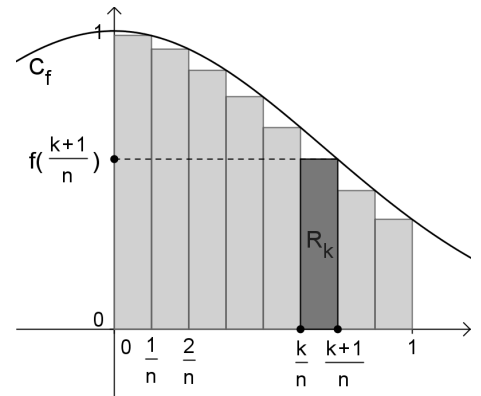
Remarque : On peut aussi noter : $s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

3) Saisir « **S_n=sommesupérieure(f,0,1,n)** ».

Le logiciel crée ainsi n rectangles au-dessus la courbe de f .

4) Donner pour S_n une formule similaire à celle obtenue pour s_n .

5) En raisonnant sur les aires, donner à l'aide du logiciel un encadrement le plus précis possible de $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$.



PARTIE B : Avec un algorithme

1) Programmer un algorithme qui demande un entier naturel n et qui donne la valeur de s_n .

2) Recherche de la précision de la méthode :

a) Exprimer $S_n - s_n$ en fonction de $f(0)$; $f(1)$ et n .

b) En déduire que $0 \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx - s_n \leq \frac{1}{n}$.

c) Quelle valeur de n faut-il choisir pour que s_n soit une valeur approchée de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ à 10^{-4} près ?

3) A l'aide de l'algorithme, déterminer une valeur approchée de $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ à 10^{-4} près. Soyez patient ! Cela peut prendre du temps avec une calculatrice.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales