# SYSTEMES D’EQUATIONS

I. Méthodes de résolution

 1) Méthode de substitution

Méthode : Résoudre un système d’équations par la méthode de substitution

 **Vidéo** [**https://youtu.be/24VsDZK6bN0**](https://youtu.be/24VsDZK6bN0)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/tzOCBkFZgUI**](https://youtu.be/tzOCBkFZgUI)

Dans une boulangerie, Fabien achète 3 pains au chocolat et 2 croissants. Il paie 5,60 €.

Dans la même boulangerie, Bob achète 1 pain au chocolat et 3 croissants. Il paie 4,20 €.

Calculer le prix d’un pain au chocolat et d’un croissant.



Choix des inconnues :

 *x* le prix d’un pain au chocolat

*y* le prix d’un croissant.

Mise en équations :

$ \left\{\begin{array}{c}3x+2y=5,60\\x+3y=4,20\end{array}\right.$

Résolution du système d’équations :

A noter : Ici, la méthode de substitution se prête bien à la résolution du système car une équation contient une inconnue facile à isoler : *x* dans la 2e équation

On résout la 1ère équation pour trouver *y*.

On **substitue** l’inconnue isolée *x* dans la 1ère équation.

$$\left\{\begin{array}{c}3x+2y=5,60\\x+3y=4,20\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}3x+2y=5,60\\x=4,20-3y \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}3\left(4,20-3y\right)+2y=5,60\\x=4,20-3y \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}12,60-9y+2y=5,60\\x=4,20-3y \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}-7y=-7 \\x=4,20-3y\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}y=1 \\x=4,20-3×1\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}y=1 \\x=1,20\end{array}\right.$$

On calcule la valeur de *x*.

L’inconnue *y* étant trouvée, on la substitue dans la 2e équation.

On note : S = {(1,20 ; 1)}

Conclusion :

Le prix d’un pain au chocolat est de 1,20 € et le prix d’un croissant est de 1 €.

 2) Méthode des combinaisons linéaires

Méthode : Résoudre un système d’équations par la méthode des combinaisons linéaires

 **Vidéo** [**https://youtu.be/UPIz65G4f48**](https://youtu.be/UPIz65G4f48)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/V3yn\_oEdgxc**](https://youtu.be/V3yn_oEdgxc)

Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{c}3x-2y=5\\5x+3y=2\end{array}\right.$

A noter : Ici, la méthode de substitution ne se prête pas à la résolution du système car en isolant une inconnue, on ramène les équations à des coefficients rationnels. Ce qui compliquerait considérablement les calculs.

On multiplie la première équation par 5 et la deuxième équation par 3 dans le but d’éliminer une inconnue par soustraction ou addition des deux équations.

$$\begin{matrix}×5\\×3\end{matrix}\left\{\begin{array}{c}3x-2y=5\\5x+3y=2\end{array}\right.$$

On soustraie les deux premières équations. Ici, on élimine l’inconnue *x*.

$$\frac{\begin{matrix} \\-\end{matrix}\left\{\begin{array}{c}15x-10y=25\\15x+9y=6 \end{array}\right.}{15x-15x-10y-9y=25-6}$$

On résout l’équation obtenue pour trouver l’inconnue *y*.

$$-19y=19$$

$$y=-1$$

On substitue dans une des équations du système la valeur ainsi trouvée pour *y* et on calcule la valeur de l’autre inconnue.

$$3x-2×\left(-1\right)=5$$

$$3x+2=5$$

$$3x=5-2$$

$$3x=3$$

$$x=1$$

O

1

1

*f*(*x*) *= 2x*

*g*(*x*) *= 4x – 4*

2

4

On note : S = {(1 ; -1)}

II. Interprétation graphique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/-LV\_5rkW0RY**](https://youtu.be/-LV_5rkW0RY)

 1) Droites et systèmes

On considère le système : $\left\{\begin{array}{c}-2x+y=0\\4x-y=4\end{array}\right.$

Le système (S) équivaut à $\left\{\begin{array}{c}y=2x \\y=4x-4\end{array}\right.$

On désigne par (d) et (d’) les droites représentant les fonctions respectives :

$f\left(x\right)=2x et g\left(x\right)=4x-4$.

La solution du système est donc le couple (*x* ; *y*) coordonnées du point d’intersection des deux droites (d) et (d’).

Par lecture graphique, on trouve le couple (2 ; 4) comme solution du système.

Définition :

Soit *a, b, a’* et *b’* des nombres réels donnés.

Résoudre le système d’équations $\left\{\begin{array}{c}ax+by=c \\a'x+b'y=c'\end{array}\right.$ c’est trouver tous les couples

(*x* ; *y*) de nombres réels vérifiant simultanément les deux équations du système.

Soit (S) le système d’équations : $\left\{\begin{array}{c}ax+by=c \\a'x+b'y=c'\end{array}\right.$ où *a, b, a’* et *b’* sont des nombres réels donnés avec *b* ≠ 0 et *b’* ≠ 0.

Le système (S) équivaut à $\left\{\begin{array}{c}by=c-ax \\b^{'}y=-a'x+c'\end{array}\right.$

Soit :

O

J

I

M(*x*M ; *y*M)

$$\left\{\begin{array}{c}y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b} \\y=-\frac{a'}{b'}x+\frac{c'}{b'}\end{array}\right.$$

Si les coefficients directeurs des droites associées à ces deux équations sont différents alors elles possèdent un unique point d’intersection, soit :

$$-\frac{a}{b}\ne -\frac{a'}{b'}$$

Soit encore : *ab' ≠ a'b*

Si M est le point d’intersection des deux droites, le couple de ses coordonnées

(*x*M ; *y*M) est solution du système.

2) Exemple d’un système n’admettant pas de solution

 **Vidéo** [**https://youtu.be/IYzK0zVr-Lk**](https://youtu.be/IYzK0zVr-Lk)

 Soit (S) le système : $\left\{\begin{array}{c}-3x+y=1\\6x-2y=6\end{array}\right.$

Résolution du système :

En isolant *y* dans la première équation, on a : *y =* 3*x +* 1

En remplaçant *y* dans la deuxième équation, on a : 6*x –* 2(3*x +* 1) *=* 6

Soit : 6*x –* 6*x –* 2 *=* 6

Soit encore : *–* 2 *=* 6. On a abouti à une contradiction.

Les deux équations du système (S) ne peuvent pas être vérifiées simultanément par un couple de nombres réels (*x*; *y*).

Le système (S) ne possède donc pas de solution.

Interprétation géométrique :

Le système (S) équivaut à $\left\{\begin{array}{c}y=3x+1 \\-2y=-6x+6\end{array}\right.$ , soit :

$$ \left\{\begin{array}{c}y=3x+1 \\y=\frac{-6}{-2}x+\frac{6}{-2}\end{array}\right.$$

O

J

I

*y = 3x+1*

*y = 3x-3*

 Soit encore : $\left\{\begin{array}{c}y=3x+1 \\y=3x-3\end{array}\right.$

Les droites d’équations *y =* 3*x +* 1 et *y =* 3*x –* 3 possèdent des coefficients directeurs égaux, elles sont donc strictement parallèles.

Il n’existe pas de couple de nombres réels (*x*; *y*) vérifiant simultanément les équations des deux droites.

3) Exemple d’un système admettant une infinité de solutions

 **Vidéo** [**https://youtu.be/IYzK0zVr-Lk**](https://youtu.be/IYzK0zVr-Lk)

Soit (*S*) le système : $\left\{\begin{array}{c}-6x-3y=-6\\2x+y=2 \end{array}\right.$

Résolution du système :

Le système (S) équivaut à $\left\{\begin{array}{c}-3y=6x-6 \\y=-2x+2 \end{array}\right.$ , soit :

$$ \left\{\begin{array}{c}y=\frac{6}{-3}x-\frac{6}{-3} \\y=-2x+2\end{array}\right.$$

 Soit encore : $\left\{\begin{array}{c}y=-2x+2 \\y=-2x+2\end{array}\right.$

Tous les couples de coordonnées (*x*; *y*) vérifiant l’équation *y =* 2*x +* 2 sont solutions du systèmes (S).

Pour *x* = 5 par exemple, *y* = -2x5 + 2 = -8. Le couple (5 ; -8) est solution.

Il existe une infinité de couples de nombres réels (*x*; *y*) vérifiant l’équation

 *y =* 2*x +* 2.

Le système (S) possède donc une infinité de solutions.

Interprétation géométrique :

Les droites associées à ces deux équations sont confondues.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)