SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

I. Etude d'une suite arithmético-géométrique

Définition : Une suite (u_n) est dite arithmético-géométrique s'il existe deux nombres a et b tels que pour tout entier *n*, on a : $u_{n+1} = au_n + b$.

Un investisseur dépose 5000 € sur un compte rémunéré à 3% par an. Chaque année suivante, il dépose 300€ de plus. On note (u_n) la somme épargnée à l'année n.
On a alors : $u_{n+1} = 1{,}03u_n + 300$ et $u_0 = 5000$
La suite (u_n) est arithmético-géométrique.

1) À l'aide du tableur, calculer la somme totale épargnée à la 10ème année.
2) Prouver que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n + 10000$ est géométrique et donner sa raison et son premier terme.
3) Exprimer v_n en fonction de n.
4) En déduire u_n en fonction de n. Retrouver alors le résultat de la question 1 par calcul.
5) Etudier les variations de (u_n).
6) Calculer la limite de (u_n).

Vidéo https://youtu.be/6-vFnQ6TghM
Vidéo https://youtu.be/0CNt_fUuwEY
Vidéo https://youtu.be/EgYTH79sDfw

1) Avec le tableur, on obtient :

B2 =1,03*B1+300

	A	B	C	D
1	Année 0	5000		
2	Année 1	5450		
3	Année 2	5913,5		
4	Année 3	6390,905		
5	Année 4	6882,6322		
6	Année 5	7389,1111		
7	Année 6	7910,7844		
8	Année 7	8448,108		
9	Année 8	9001,5512		
10	Année 9	9571,5978		
11	Année 10	10158,746		

La somme totale épargnée à la 10ème année est égale à environ 10158,75 €.

2)

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 10000 \\ &= 1{,}03u_n + 300 + 10000 \\ &= 1{,}03u_n + 10300 \\ &= 1{,}03\left(u_n + 10000\right) \\ &= 1{,}03v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme $v_0 = u_0 + 10000 = 5000 + 10000 = 15000$.

3) Pour tout n, $v_n = 15000 \times 1{,}03^n$.

4) Pour tout n, $u_n = 15000 \times 1{,}03^n - 10000$.

On a alors : $u_{10} = 15000 \times 1{,}03^{10} - 10000 \approx 10158{,}75$

5) Pour tout n,

$$\begin{aligned} & u_{n+1} - u_n = 15000 \times 1{,}03^{n+1} - 10000 - \left(15000 \times 1{,}03^n - 10000\right) \\ & = 15000 \times \left(1{,}03^{n+1} - 1{,}03^n\right) \\ & = 15000 \times 1{,}03^n \times \left(1{,}03 - 1\right) \\ & = 450 \times 1{,}03^n > 0 \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

6) Comme 1,03 > 1, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}03^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(15000 \times 1{,}03^n\right) = +\infty$

Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(15000 \times 1{,}03^n - 10000\right) = +\infty$, soit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

II. Représentation graphique d'une suite arithmético-géométrique

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 1{,}8$.

1) Dans un repère orthonormé, tracer les droites d'équations respectives $y = 0{,}85x + 1{,}8$ et $y = x$.

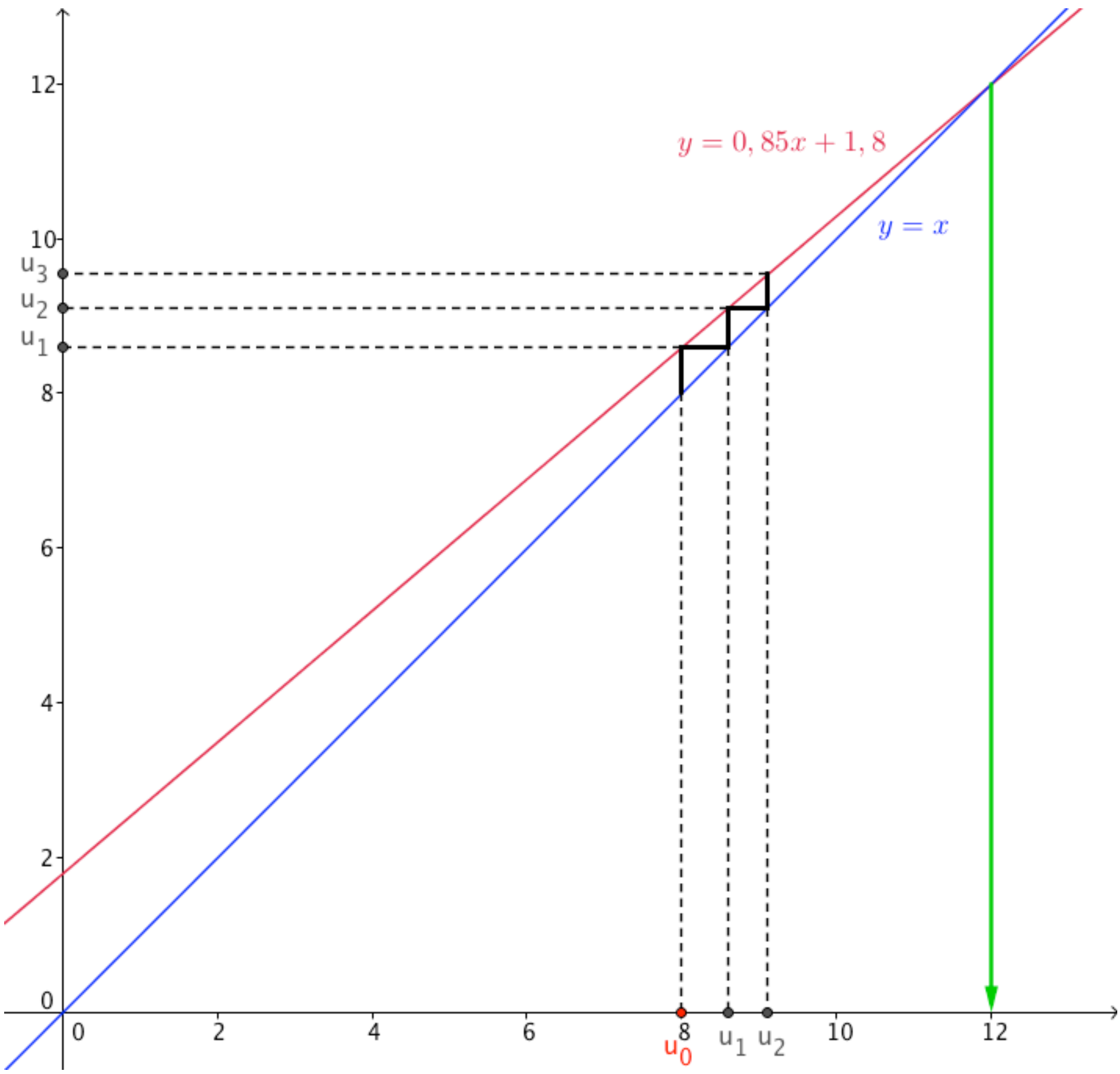
2) Dans ce repère, placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1, u_2 et u_3. On laissera apparent les traits de construction.

3) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n).

D'après Bac ES Polynésie 2009

Vidéo https://youtu.be/L7bBL4z-r90

1) 2)



3) En continuant le tracé, celui-ci se rapprocherait de plus en plus de l'intersection des deux droites. On conjecture que la limite de la suite (u_n) est 12.

Afficher la représentation graphique sur la calculatrice :

Vidéo TI https://youtu.be/bRIvVs9KZuk

Vidéo Casio https://youtu.be/9iDvDn3iWqQ

Vidéo HP https://youtu.be/wML003kdLRo