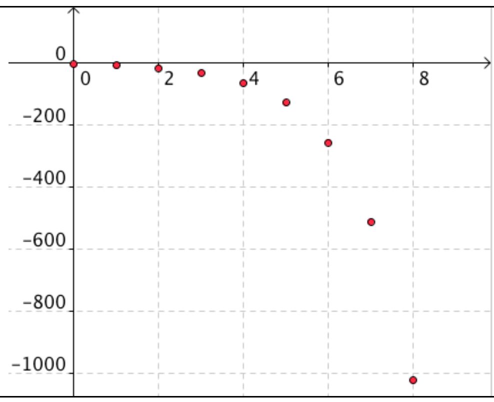
SUITES GEOMETRIQUES

I. Rappels

Exemple :
Considérons une suite numérique (u_n) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.
Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :
$u_0 = 5$,
$u_1 = 10$,
$u_2 = 20$,
$u_3 = 40$.
Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

La suite introduite plus haut est définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

	(u_n) une **suite géométrique** de **raison** q de premier terme u_0.	**Exemple :** $q = 2$ et $u_0 = -4$
Définition	$u_{n+1} = q \times u_n$	$u_{n+1} = 2 \times u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2.
Propriété	$u_n = u_0 \times q^n$	$u_n = -4 \times 2^n$
Variations	Pour $u_0 > 0$: Si q > 1 : (u_n) est croissante. Si 0 < q < 1 : (u_n) est décroissante. Pour $u_0 < 0$: Si q > 1 : (u_n) est décroissante. Si 0 < q < 1 : (u_n) est croissante.	$u_0 = -4 < 0$ $q = 2 > 1$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Si q < 0 : la suite géométrique n'est ni croissante ni décroissante.	

Exemple concret :
On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élève à 4%.
Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.
Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

On note u_n le capital après n années.
On a ainsi :
$u_1 = 1,04 \times 500 = 520$ $u_2 = 1,04 \times 520 = 540,80$ $u_3 = 1,04 \times 540,80 = 562,432$
De manière générale : $u_{n+1} = 1,04 \times u_n$ avec $u_0 = 500$
On peut également exprimer u_n en fonction de n : $u_n = 500 \times 1,04^n$

II. Somme de termes consécutifs

Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :
$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Remarque : Il s'agit de la somme des n+1 premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Méthode : Calculer la somme des termes successifs d'une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/rlaYMXPbWE8

Calculer la somme S suivante : $S = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{13}$

$$S = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{13} = \frac{1-3^{14}}{1-3} = 2391484$$

Démonstration de la propriété :
On pose : $S = 1 + q + q^2 + ... + q^n$
On veut montrer que : $S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
On veut donc montrer que : $S \times (1-q) = 1 - q^{n+1}$

$$S\times(1-q)$$
$$=S-q\times S$$
$$=(1+q+q^2+...+q^n)-q(1+q+q^2+...+q^n)$$
$$=1+q+q^2+...+q^n-q-q^2-q^3-...-q^{n+1}$$
$$=1-q^{n+1}$$

Méthode : Calculer la somme des termes successifs d'une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/XcszOqP9sbk

Un jeune entrepreneur investit un capital de départ de 20 000 € pour son entreprise.
Afin de la dynamiser, il injecte chaque mois une somme supplémentaire à son capital, celle-ci diminue de 30% chaque mois.
Calculer le total du capital investi à la fin de la première année.

On note (u_n) le capital injecté au *n*-ième mois alors $u_{n+1}=0,7u_n$.
(u_n) est donc une suite géométrique de raison *q* = 0,7 et de premier terme u_0 = 20000.
Le total du capital investit à la fin de la première année est :

$$S=u_0+u_1+u_2+...+u_{11}$$
$$=20000+20000\times0,7+20000\times0,7^2+...+20000\times0,7^{11}$$
$$=20000\times(1+0,7+0,7^2+...+0,7^{11})$$
$$=20000\times\frac{1-0,7^{12}}{1-0,7}\approx65744$$