SUITES GEOMETRIQUES

I. Rappels et expression du terme général

Méthode : Exprimer une suite géométrique en fonction de *n*

Vidéo https://youtu.be/WTmdtbQpa0c

On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4% par an.
On note u_n la valeur du capital après n années.

1) Calculer u_2 et u_3.
2) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? On donnera son premier terme et sa raison.
3) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
4) Donner la variation de la suite (u_n).
5) Exprimer u_n en fonction de n.

1) Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.
$u_0 = 500$
$u_1 = 1{,}04 \times 500 = 520$
$u_2 = 1{,}04 \times 520 = 540{,}80$
$u_3 = 1{,}04 \times 540{,}80 = 562{,}432$

2) (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 500$ et de raison $q = 1{,}04$.

3) $u_{n+1} = 1{,}04 u_n$

4) $q = 1{,}04 > 1$ donc la suite (u_n) est croissante.

5) Après 1 an, le capital est égal à : $u_1 = 1{,}04 \times 500$
Après 2 ans, le capital est égal à : $u_2 = 1{,}04^2 \times 500$
Après 3 ans, le capital est égal à : $u_3 = 1{,}04^3 \times 500$
De manière générale, après n années, le capital est : $u_n = 1{,}04^n \times 500$

Propriété : Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, on a :
$$u_n = u_0 \times q^n$$
$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

II. Somme des termes

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite géométrique

On considère la suite géométrique (u_n) de raison $q = 2$ et de premier terme $u_1 = 5$.
1) Exprimer u_n en fonction de n.
2) A l'aide de la calculatrice, calculer la somme S = $u_5 + u_6 + u_7 + ... + u_{20}$

1) $u_n = 5 \times 2^{n-1}$

2) On saisit sur la calculatrice :

Sur TI : **som(suite(5*2^{X-1},X,5,20))**

Sur Casio : $\sum_{X=5}^{20}(5\times 2^{X-1})$

La calculatrice affiche 5 242 800. Donc S = $u_5 + u_6 + u_7 + ... + u_{20}$ = 5 242 800.

III. Comparaison de suites

Méthode : Comparer deux suites

Une banque propose deux options de placement :
- Placement A : On dépose un capital de départ. Chaque année, la banque nous reverse 6% du capital de départ.
- Placement B : On dépose un capital de départ. Chaque année, la banque nous reverse 4% du capital de l'année précédente.

On suppose que le placement initial est de 200€. L'objectif est de savoir à partir de combien d'années un placement est plus intéressant que l'autre.
On note u_n la valeur du capital après n années pour le placement A et v_n la valeur du capital après n années pour le placement B.

1) a) Calculer u_1, u_2 et u_3.
   b) Calculer v_1, v_2 et v_3.
2) Quelle est la nature des suites (u_n) et (v_n) ? On donnera le premier terme et la raison.
3) Exprimer u_n et v_n en fonction de n.
4) Déterminer le plus petit entier n, tel que $u_n < v_n$. Interpréter ce résultat.

1) a) Avec le placement A, on gagne chaque année 6% de 200€ = 12€.
u_0 = 200
$u_1 = 200 + 12 = 212$
$u_2 = 212 + 12 = 224$
$u_3 = 224 + 12 = 236$
   b) Avec le placement B, chaque année le capital est multiplié par 1,04.
u_0 = 200
$u_1 = 1{,}04 \times 200 = 208$
$u_2 = 1{,}04 \times 208 = 216{,}32$
$u_3 = 1{,}04 \times 216{,}32 \approx 224{,}97$

2) (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 = 200 et de raison r = 12.
(v_n) est une suite géométrique de premier terme v_0 = 200 et de raison q = 1,04.

3) $u_n = 200 + 12n$

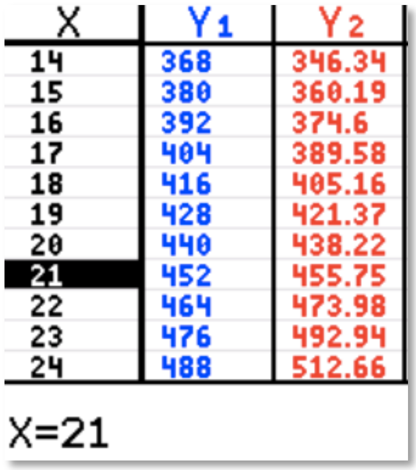
$v_n = 200 \times 1{,}04^n$

4) Saisir l'expression du terme général, comme pour une fonction :

Y1=200+12X

Y2=200*1.04^X

Paramétrer la Table avec un pas de 1 et afficher la table :



X	Y1	Y2
14	368	346.34
15	380	360.19
16	392	374.6
17	404	389.58
18	416	405.16
19	428	421.37
20	440	438.22
21	452	455.75
22	464	473.98
23	476	492.94
24	488	512.66

X=21

Le plus petit entier n, tel que $u_n < v_n$ est 21.

Cela signifie qu'à partir de 21 années, le placement B devient plus rentable que le placement A.

Décibels : Téléphones VS Avion :

Vidéo https://youtu.be/WTmdtbQpa0c

RÉSUMÉ	(u_n) une **suite géométrique** de **raison** q positive de premier terme u_0 positif.	**Exemple :** $q = 2$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = q \times u_n$	$u_{n+1} = 2 \times u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2.
Propriété	$u_n = u_0 \times q^n$ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$	$u_n = 4 \times 2^n$
Variations	Si $q > 1$: (u_n) est croissante. Si $0 < q < 1$: (u_n) est décroissante.	$q = 2 > 1$ La suite (u_n) est croissante.
Représentation graphique