# SUITES ARITHMETIQUES ET SUITES GEOMETRIQUES

**Vidéo** https://youtu.be/pHq6oClOyIU

## I. Suites arithmétiques

### 1) Définition

Exemples :

a) Considérons une suite numérique $(u_n)$ où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 5.
Si le premier terme est égal à 3, les premiers termes successifs sont :
$u_0$ = 3,
$u_1$ = 8,
$u_2$ = 13,
$u_3$ = 18.
Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.

La suite est donc définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$.

b) Soit la suite numérique $(v_n)$ de premier terme 5 et de raison -2.
Les premiers termes successifs sont :
$v_0$ = 5,
$v_1$ = 5 – 2 = 3,
$v_2$ = 3 – 2 = 1,
$v_3$ = 1 – 2 = -1.

La suite est donc définie par : $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = v_n - 2 \end{cases}$.

Définition : Une suite $(u_n)$ est une suite arithmétique s'il existe un nombre $r$ tel que pour tout entier $n$, on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre $r$ est appelé raison de la suite.

### 2) Variations

Propriété : $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison $r$.
- Si $r > 0$ alors la suite $(u_n)$ est croissante.
- Si $r = 0$ alors la suite $(u_n)$ est constante.
- Si $r < 0$ alors la suite $(u_n)$ est décroissante.

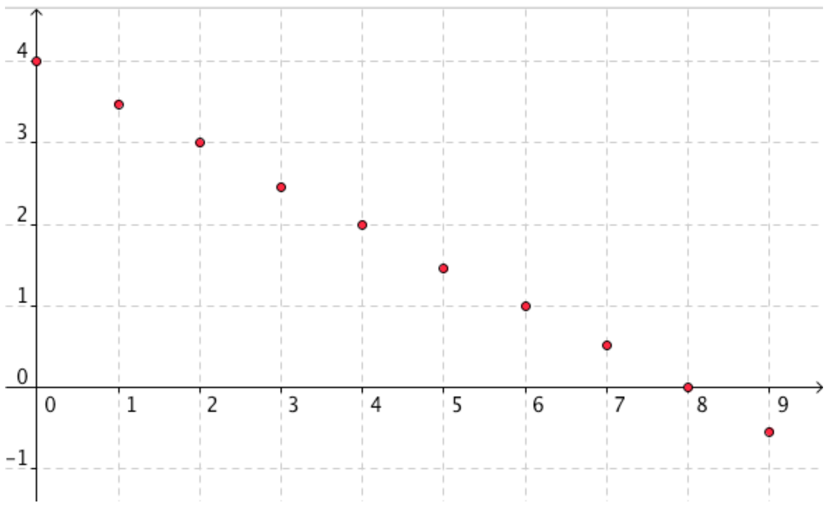
Démonstration : $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$.
- Si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite $(u_n)$ est croissante.
- Si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite $(u_n)$ est décroissante.

Exemple :
La suite arithmétique $(u_n)$ définie par $u_{n+1} = u_n - 4$ et $u_0 = 5$ est décroissante car de raison négative et égale à -4.

### 3) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple :
On a représenté ci-dessous la suite de raison -0,5 et de premier terme 4.




## II. Suites géométriques

### 1) Définition

Exemples :

a) Considérons une suite numérique $(u_n)$ où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.
Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :
$u_0 = 5$, $u_1 = 10$, $u_2 = 20$, $u_3 = 40$.

Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

La suite est donc définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

b) Soit la suite numérique $(v_n)$ de premier terme 4 et de raison 0,1.

Les premiers termes successifs sont :
$v_0$ = 4
$v_1$ = 0,1 x 4 = 0,4
$v_2$ = 0,1 x 0,4 = 0,04
$v_3$ = 0,1 x 0,04 = 0,004

La suite est donc définie par : $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = 0{,}1 \times v_n \end{cases}$.

**Définition :** Une suite ($u_n$) est une suite géométrique s'il existe un nombre $q$, strictement positif, tel que pour tout entier $n$, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre $q$ est appelé raison de la suite.

Exemple concret :
On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élève à 4%.
Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.
Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

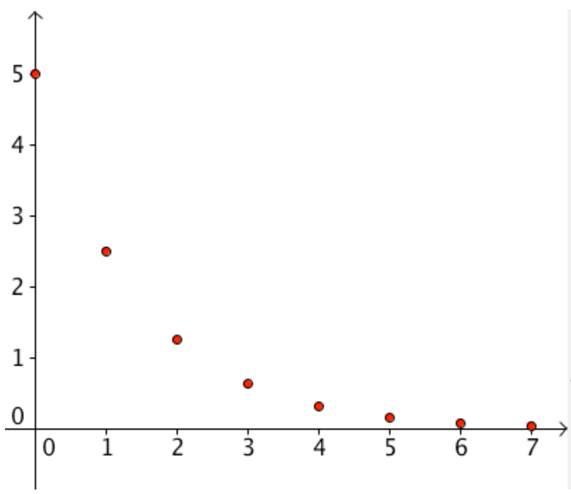
On a ainsi :
$u_1 = 1{,}04 \times 500 = 520$ $\quad$ $u_2 = 1{,}04 \times 520 = 540{,}80$ $\quad$ $u_3 = 1{,}04 \times 540{,}80 = 562{,}432$
De manière générale : $u_{n+1} = 1{,}04 \times u_n$ avec $u_0 = 500$

## 2) Variations

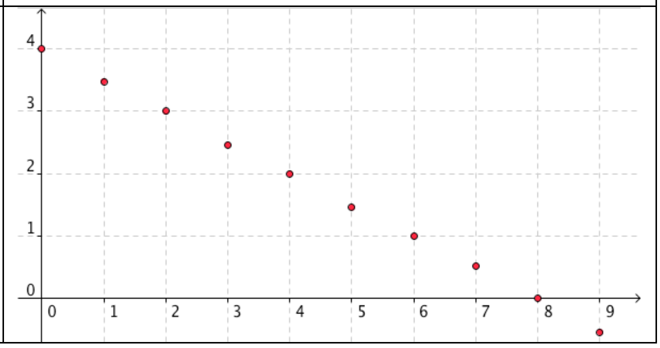
**Propriété :** ($u_n$) est une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_0$ strictement positif.
- Si $q$ > 1 alors la suite ($u_n$) est croissante.
- Si $q$ = 1 alors la suite ($u_n$) est constante.
- Si 0 < $q$ < 1 alors la suite ($u_n$) est décroissante.

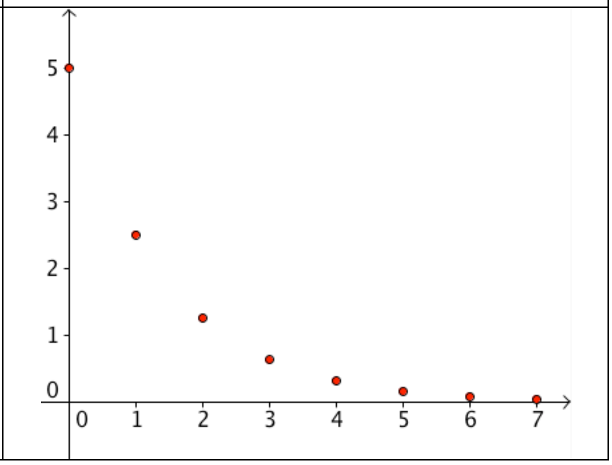
Exemple :

La suite géométrique ($u_n$) définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 0{,}5u_n \end{cases}$ est décroissante car la raison est strictement inférieure à 1.




| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | n | $u_n$ |
| 2 | 0 | 5 |
| 3 | 1 | 2.5 |
| 4 | 2 | 1.25 |
| 5 | 3 | 0.63 |
| 6 | 4 | 0.31 |
| 7 | 5 | 0.16 |
| 8 | 6 | 0.08 |
| 9 | 7 | 0.04 |
| 10 | 8 | 0.02 |
| 11 | 9 | 0.01 |

| **RÉSUMÉS** | $(u_n)$ une **suite arithmétique**<br>- de **raison** $r$<br>- de premier terme $u_0$ | **Exemple :**<br>$r=-0{,}5$ et $u_0=4$ |
|---|---|---|
| Définition | $u_{n+1}=u_n+r$ | $u_{n+1}=u_n-0{,}5$<br>La différence entre un terme et son précédent est égale à -0,5. |
| Variations | Si $r>0$ : $(u_n)$ est croissante.<br>Si $r<0$ : $(u_n)$ est décroissante. | $r=-0{,}5<0$<br>La suite $(u_n)$ est décroissante. |
| Représentation graphique | Remarque :<br>Les points de la représentation graphique sont alignés. |  |

| | $(u_n)$ une **suite géométrique**<br>- de **raison** $q>0$<br>- de premier terme $u_0>0$ | **Exemple :**<br>$q=0{,}5$ et $u_0=5$ |
|---|---|---|
| Définition | $u_{n+1}=q\times u_n$ | $u_{n+1}=0{,}5\times u_n$<br>Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 0,5. |
| Variations | Si $q>1$ : $(u_n)$ est croissante.<br>Si $0<q<1$ : $(u_n)$ est décroissante. | $q=0{,}5<1$<br>La suite $(u_n)$ est décroissante. |
| Représentation graphique | Remarque :<br>Si $q<0$ : la suite géométrique n'est ni croissante ni décroissante. |  |