PROBABILITÉS

En 1654, *Blaise Pascal* (1623 ; 1662) entretient avec *Pierre de Fermat* (1601 ; 1665) des correspondances sur le thème des jeux de hasard et d'espérance de gain qui les mènent à exposer une théorie nouvelle : les calculs de probabilités.
Ils s'intéressent à la résolution de problèmes de dénombrement comme par exemple celui du *Chevalier de Méré* :
« Comment distribuer équitablement la mise à un jeu de hasard interrompu avant la fin ? »

I. Variable aléatoire et loi de probabilité

1) Variable aléatoire

Exemple :
Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat."
L'ensemble de toutes les issues possibles est E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.
On considère l'événement A : "On obtient un résultat pair."
On a donc : A = {2 ; 4 ; 6}.
On considère l'événement élémentaire B : "On obtient un 3".
On a donc : B = {3}.

On considère le jeu suivant :
- Si le résultat est pair, on gagne 2€.
- Si le résultat est 1, on gagne 3€.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4€.

On a défini ainsi une variable aléatoire X qui peut prendre les valeurs 2, 3 ou -4.
On a donc : X(1) = 3, X(2) = 2, X(3) = -4, X(4) = 2, X(5) = -4, X(6) = 2.
La variable aléatoire X peut ici être considérée comme une fonction qui pour des valeurs de l'ensemble E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} associe des valeurs de l'ensemble {-4 ; 2 ; 3}.

Définition : Soit E l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire X définie sur E associe à chaque issue de E un nombre réel.

2) Loi de probabilité

Exemple : On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent.
Chaque issue du lancer de dé est équiprobable et égale à $\frac{1}{6}$.

La probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur 2 est égale à $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

On note : P(X = 2) = $\frac{1}{2}$.

De même : P(X = 3) = $\frac{1}{6}$ et P(X = -4) = $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

On peut résumer les résultats dans un tableau :

x_i	-4	2	3
P(X = x_i)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Ce tableau résume la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

<u>Définition :</u> Soit une variable aléatoire X définie sur E et prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
La <u>loi de probabilité</u> de X associe à toute valeur x_i la probabilité P(X = x_i).

<u>Remarques :</u>
- P(X = x_i) peut se noter p_i.
- $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

<u>Exemple :</u>

Dans l'exemple traité plus haut : $p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6} = 1$.

<u>Méthode :</u> Déterminer une loi de probabilité

Vidéo https://youtu.be/2Ge_4hclPnI

Soit l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."
On considère le jeu suivant :
- Si on tire un cœur, on gagne 2€.
- Si on tire un roi, on gagne 5€.
- Si on tire une autre carte, on perd 1€.

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.
Déterminer la loi de probabilité de X.

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 2, 5, -1 mais aussi 7.
En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne 5(roi) + 2(cœur) = 7€.

- Si la carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), X = 2.

P(X = 2) = $\frac{7}{32}$.

- Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur), X = 5.

P(X = 5) = $\frac{3}{32}$.

- Si la carte tirée est le roi de cœur, X = 7.

P(X = 7) = $\frac{1}{32}$.

- Si la carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, X = -1.

P(X = -1) = $\frac{21}{32}$.

La loi de probabilité de X est :

x_i	-1	2	5	7
P(X = x_i)	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

On constate que : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{21}{32}+\frac{7}{32}+\frac{3}{32}+\frac{1}{32} = 1$

II. Espérance

Définition : Soit une variable aléatoire X définie sur E et prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
La loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i la probabilité $p_i = P(X = x_i)$.

L'espérance mathématique de la loi de probabilité de X est :

$$E(x) = p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + \ldots + p_n\, x_n$$

Méthode : Calculer l'espérance d'une loi de probabilité

Vidéo https://youtu.be/AcWVxHgtWp4

Dans le jeu de la "Méthode" du paragraphe précédent, calculer l'espérance de la loi de probabilité de X et interpréter le résultat.

E(X) = $\frac{21}{32}\times(-1)+\frac{7}{32}\times 2+\frac{3}{32}\times 5+\frac{1}{32}\times 7 = \frac{15}{32}$.

L'espérance est égale à $\frac{15}{32} \approx 0{,}5$ signifie qu'en jouant, on peut espérer gagner environ 0,50€.

Remarque :

L'espérance est la moyenne de la série des x_i pondérés par les probabilités p_i.
En effet :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{1} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

En répétant un grand nombre de fois l'expérience, la loi des grands nombres nous permet d'affirmer que les fréquences se rapprochent des probabilités théoriques.
La moyenne des résultats se rapprochent donc de l'espérance de la loi de probabilité.
L'espérance est donc la moyenne que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.