

APPROCHONS LE NOMBRE PI

Objectifs :

Calculer les termes (ou facteurs) successifs de séries convergeant vers le nombre Pi.
Comparer la vitesse de convergence pour les différentes séries.

1^{ère} partie : La formule d'Euler

Il existe de nombreuses formules permettant d'approcher le nombre π .

Le mathématicien suisse *Leonhard EULER* (1707-1783) est à l'origine de la formule suivante :

$$\pi = 2 \times \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{9} + \dots \right)$$

Les points de suspension signifient que la somme ne s'arrête jamais et qu'il faudrait la continuer indéfiniment pour calculer la « valeur exacte » (qui n'existe pas !) de π .

On calcule alors des valeurs approchées successives en ajoutant de plus en plus de termes dans la somme entre parenthèses, soient par exemple :

$$p_1 = 2 \times \left(1 + \frac{1}{3} \right) \quad p_2 = 2 \times \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \right) \quad p_3 = 2 \times \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} \right)$$

- Calculer p_1 , p_2 et p_3 . On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au millième.
- Sans la calculer, écrire l'expression de p_5 .

Ouvrir le fichier du tableur « PI » et réenregistrer-le en suivant les consignes du professeur.

Le tableur va maintenant effectuer pour nous ces calculs fastidieux en donnant des valeurs approchées très précises.

1) Dans la colonne D, afficher les résultats arrondis à 10^{-14} près des calculs des rapports se trouvant dans la formule d'Euler : $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots$ **T1 T2 T3**

2) Dans la colonne E, afficher les résultats arrondis à 10^{-14} près des calculs des termes successifs de la suite : $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \times \frac{2}{5}, \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{7}, \dots$ **T4**

3) Dans la colonne F, afficher les sommes successives des termes de la colonne E. Par exemple :

La cellule F4 contient la somme des nombres se trouvant dans les cellules E3 à E4.

La cellule F5 contient la somme des nombres se trouvant dans les cellules E3 et E5... **T5 T6**

Modifier le format pour afficher 14 décimales.

4) Dans la cellule G3, entrer une formule affichant le double du nombre compris dans la cellule F3 puis modifier le format de la cellule pour afficher 14 décimales et copier la formule sur le reste de la colonne G.

Dans quelles cellules retrouve-t-on les valeurs de p_1 , p_2 et p_3 calculées au début de l'activité ?

Où trouve-t-on dans le tableau les meilleures approximations de π ?

5) Les sommes successives de la formule d'Euler donnent des valeurs approchées de plus en plus précises du nombre π .

Pour évaluer la précision de la méthode à la dernière étape du calcul (cellule G42), rechercher sur Internet les 14 premières décimales du nombre π .

Déduire le nombre de décimales exactes de π fourni par cette méthode à la dernière étape. Les écrire.

2^{ème} partie : La formule de Viète

Voici une seconde formule permettant d'approcher le nombre π . Celle-ci a été découverte par le mathématicien français François Viète (1540-1603) :

$$\pi = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \times \dots}$$

Cliquer sur l'onglet « Viète » (en bas). Dans cette partie, l'objectif est d'établir une nouvelle approximation de π en appliquant la formule de Viète.

Dans tout le tableau, on modifiera le format des cellules pour obtenir un affichage des nombres avec 14 décimales.

1) Dans la colonne B, afficher les résultats des expressions successives :

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots \quad \text{T7}$$

2) Dans la cellule C3, entrer une formule affichant la moitié du résultat de la cellule B3. Puis copier cette formule sur le reste de la colonne C.

3) Dans la colonne D, afficher les produits successifs des nombres de la colonne C. Par exemple :

La cellule D4 contient le produit des nombres se trouvant dans les cellules C3 à C4.

La cellule D5 contient le produit des nombres se trouvant dans les cellules C3 à C5... T8

4) Dans la cellule E3, entrer une formule affichant l'inverse du résultat de la cellule D3. Puis copier cette formule sur le reste de la colonne E.

5) Dans la cellule F3, entrer une formule affichant le double du résultat de la cellule E3. Puis copier cette formule sur le reste de la colonne F.

Donner le nombre de décimales exactes de π fourni par cette méthode à la dernière étape. Les écrire.

3^{ème} partie : Quelle est la formule la plus performante ?

Cliquer sur l'onglet « Perf » (en bas). L'objectif de cette partie est de déterminer laquelle des deux méthodes offre la meilleure approximation de π avec un minimum de calcul.

1) Copier dans la colonne B les valeurs approchées successives de π données par la formule d'Euler. T9

2) Dans la colonne C, copier de la même manière les résultats obtenus par la méthode de Viète.

3) Avec le tableur, représenter graphiquement par trois courbes les données de chaque colonne du tableau. T10

Comment peut-on à partir des graphiques déterminer la méthode la plus performante ? Quelle est cette méthode ?

Prolongement pour les experts !

Créer une feuille de calcul permettant d'approcher le nombre π à l'aide de la formule du mathématicien anglais John Wallis (1616–1703) :

$$\pi = 2 \times \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \times \dots$$

Que dire de la performance de cette méthode comparée aux deux autres ?

AIDES TABLEUR

T1

Dans la cellule D4, entrer la formule **=B4/C4**

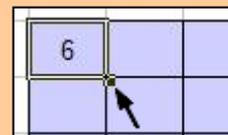
T2

Pour obtenir un arrondi à 10^{-14} près, il faut modifier le format de la cellule : sélectionner la cellule, cliquer « *Format* » puis « *Cellules* ». Cliquer sur l'onglet « *Nombres* » et choisir le nombre de décimales correspondant dans « *Options* ».

T3

Pour copier rapidement une formule :

- Sélectionner la cellule à copier.
- Cliquer sans lâcher le petit carré noir en bas à droite de la cellule sélectionnée et faire glisser le curseur de façon à recouvrir les autres cellules dans lesquelles la formule doit être copiée.



T4

Dans la cellule E5, entrer la formule **=D5*E4** puis modifier le format de la cellule afin d'obtenir l'arrondi souhaité. Copier cette formule sur le reste de la colonne E.

T5

Cliquer sur la cellule F4 puis sur l'icône Σ , sélectionner à la souris les cellules E3 à E4 et « Entrée ».

T6

Copier rapidement la formule sur toute la colonne (voir T3).

→ Cliquer par exemple sur la cellule F6... la formule n'est pas juste : en effet la somme s'effectue à partir de la cellule E5 au lieu de E3. Il faut donc indiquer au tableur que le premier terme de la somme doit rester la cellule E3.

Pour cela, modifier la formule de cellule F4 par **=SOMME(\$E\$3:E4)** ce qui signifie que E3 ne sera pas modifié lors du copiage. Puis reprendre la manipulation qui permet de copier la cellule F4 sur le reste de la colonne F.

T7

- Dans la cellule B3, entrer la formule **=RACINE(2)** qui donne une valeur approchée de $\sqrt{2}$.
- Dans la cellule B4, entrer la formule **=RACINE(2+B3)**
- Copier cette formule sur le reste de la colonne B.

T8

- Dans la cellule D4, entrer la formule **=PRODUIT(\$C\$3:C4)**
- Copier cette formule sur le reste de la colonne D.

T9

- Retourner sur la page « Euler », sélectionner les cellules de la colonne G (G3 à G42).
- Cliquer droit, « Copier ».
- Puis retourner à la page « Perf ».
- Sélectionner les cellules de la colonne B (B3 à B42).
- Cliquer droit, « Collage spécial » et dans « Sélection », ne cocher que « Nombre ».

En effectuant un collage simple, le tableur aurait également copié les formules comprises dans les cellules. Mais celles-ci ne correspondent pas à la page « Perf ». Le collage spécial a permis de copier les nombres seuls sans les formules qui les ont calculés.

T10

- Sélectionner les 12 premières lignes du tableau.
- Cliquer « Insertion » puis « Diagramme... ».
- Sélectionner le type de diagramme souhaité (ici Ligne/Lignes seules ) puis cliquer « Suivant ».
- Puis cliquer « Terminer » et agrandir le graphique.

© Copyright

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales

Yvan Monka – Académie de Strasbourg – www.maths-et-tiques.fr