NOMBRE DERIVÉ

I. Limite en zéro d'une fonction

Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{(x+1)^2-1}{x}$.

L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	…	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 0.
On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 est égale à 2 et on note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$.

2) Soit la fonction g définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $g(x)=\frac{1}{x^2}$.

A l'aide de la calculatrice, on constate que $g(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0.
On dit que la limite de g lorsque x tend vers 0 est égale à $+\infty$ et on note :
$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$.

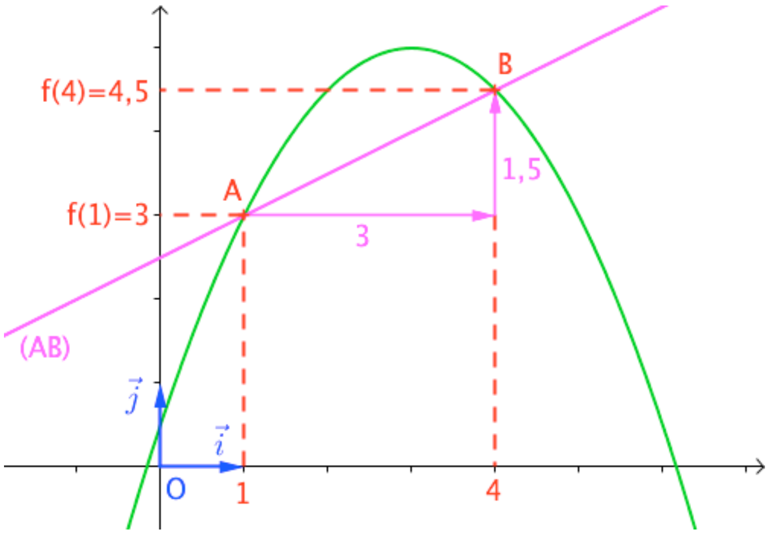
II. Dérivabilité

1) Taux d'accroissement

Exemple :
Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
Soit A et B deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives 1 et 4.

Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à : $\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{4,5-3}{4-1}=0,5$.

Ce quotient est appelé le taux d'accroissement de f entre 1 et 4.



2) Application en économie :

On considère la fonction notée C où $C(q)$ représente le coût total de production de q unités.
On appelle coût marginal de la q+1^{e} unité produite, noté $C_m(q)$, le coût supplémentaire induit par la production d'une unité supplémentaire.
C'est le taux d'accroissement de la fonction C entre q et q+1.
En effet, $\dfrac{C(q+1)-C(q)}{q+1-q}=C(q+1)-C(q)=C_m(q)$.

Méthode : Calculer un taux d'accroissement

1) Soit la fonction carrée f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.
  a) Calculer le taux d'accroissement de f entre 2 et 3.
  b) Soit h un réel non nul. Calculer le taux d'accroissement de f entre 2 et 2+h.
2) On considère le coût de production C de q objets définie par $C(q)=q^2+q$.
  a) Calculer le coût marginal du 15^{e} objet.
  b) Exprimer le coût marginal du q^{e} objet.

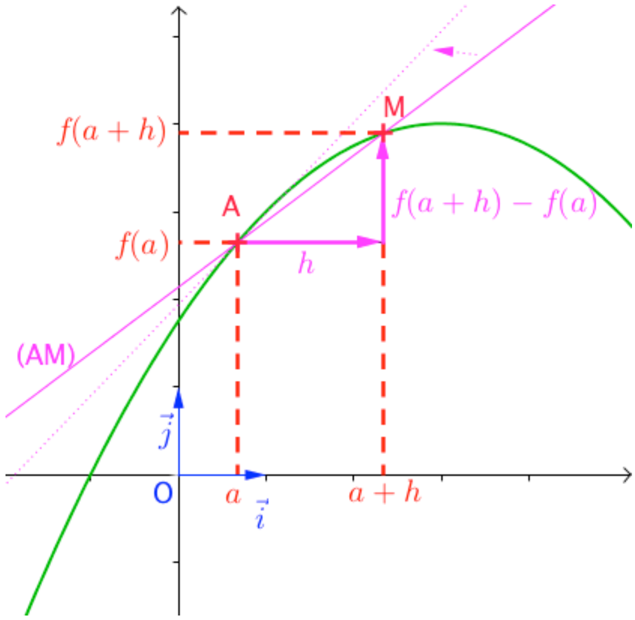
1) a) $\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}=\dfrac{3^2-2^2}{1}=5$

  b) $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2}=\dfrac{(2+h)^2-2^2}{h}=\dfrac{4+4h+h^2-4}{h}=\dfrac{4h+h^2}{h}=4+h$

2) a) $C_m(14)=C(15)-C(14)=15^2+15-\left(14^2+14\right)=30$

  b) $C_m(q-1)=C(q)-C(q-1)=q^2+q-\left((q-1)^2+q-1\right)=2q$

3) Fonction dérivable



Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
Soit un réel a appartenant à I.
Soit A et M deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et $a+h$, avec $h \neq 0$.
Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Lorsque le point M se rapproche du point A, alors h tend vers 0 et le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers une limite L.
Ce taux limite s'appelle le nombre dérivé de f en a.

Définition : On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un nombre réel L, tel que : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$.
L est appelé le nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$.

Méthode : Déterminer le nombre dérivé d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/UmT0Gov6yyE
Vidéo https://youtu.be/Iv5_mw1EYBE

Soit la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3$.
Déterminer le nombre dérivé de f en $x = 1$.

On commence par calculer $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ pour $h \neq 0$.

On a : $f(1) = -2$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-3-(-2)}{h}$$
$$= \frac{1+2h+h^2-3+2}{h}$$
$$= \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

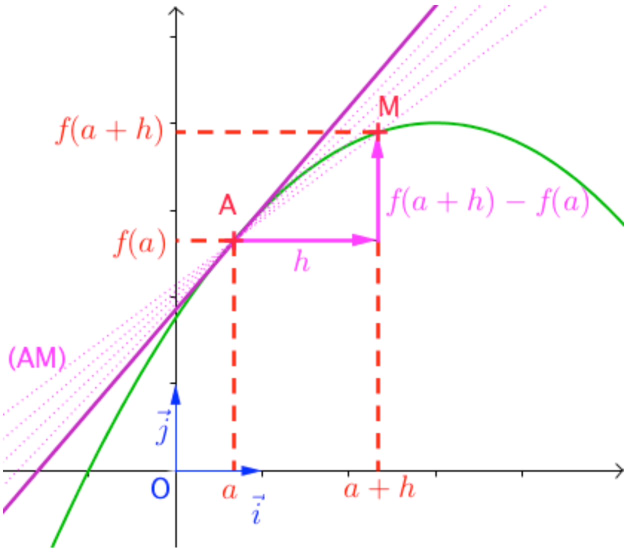
Donc : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0}(2+h) = 2$

On en déduit que f est dérivable en $x = 1$. Le nombre dérivé de f en 1 vaut 2.
On note : $f'(1) = 2$.

III. Tangente à une courbe

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I.
$f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a.
A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f.

Définition : La tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$.

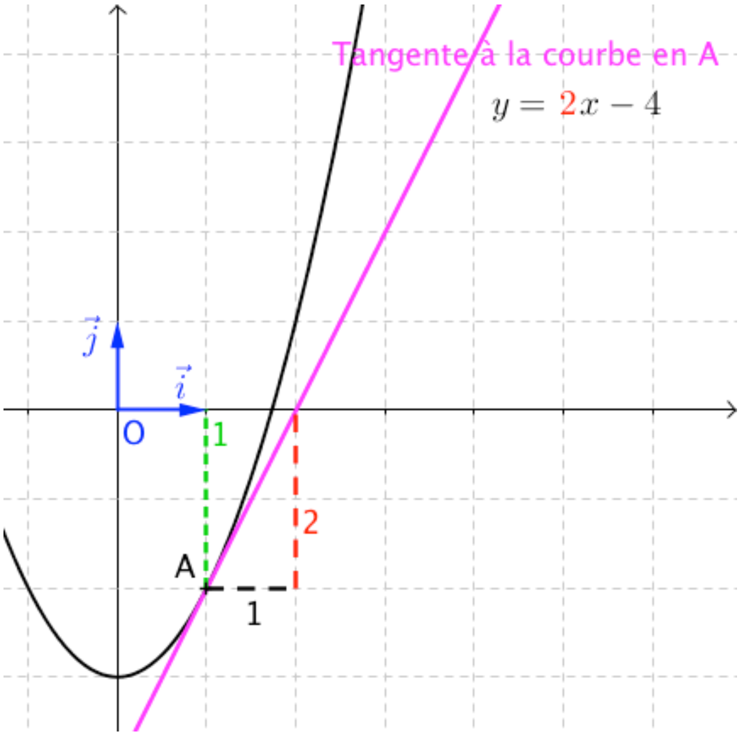


Méthode : Déterminer le coefficient directeur d'une tangente à une courbe

Vidéo https://youtu.be/0jhxK55jONs

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-3$ dont la dérivabilité en 1 a été étudiée plus haut.
Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 1.

On a vu que le nombre dérivé de f en 1 vaut 2.
Ainsi la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 1 est la droite passant par A et de coefficient directeur 2.



Propriété : Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

- Admis -

Méthode : Déterminer une équation d'une tangente à une courbe

Vidéo https://youtu.be/fKEGoo50Xmo
Vidéo https://youtu.be/7-z62dSkkTQ

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3$.
Déterminer une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 1.

On a vu plus haut que le coefficient directeur de la tangente est égal à 2.
Donc son équation est de la forme : $y = 2(x-1) + f(1)$, soit :

$y = 2(x-1) + (-2)$

$y = 2x - 4$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 1 est $y = 2x - 4$.

A l'aide de la calculatrice, il est possible de tracer la tangente à une courbe en un point.

Une fois la courbe tracée sur la calculatrice :

Avec TI-83 : Touches « 2^{nde} » + « PGRM » (Dessin) puis « 5: Tangente » et saisir l'abscisse du point de tangence, ici 2. Puis « ENTER ».

Casio 35+ : Touches « SHIFT » + « F4 » (Skech) puis « Tang » et saisir l'abscisse du point de tangence, ici 2. Puis « EXE » + « EXE ».