



LA SUITE DE FIBONACCI ET LE NOMBRE D'OR



Commentaires :

Activité en trois parties pouvant constituer un devoir à la maison sur le thème du nombre d'or. Sont abordés : les fractions, les racines carrées, un peu de calcul littéral, de la géométrie (constructions, théorème de Pythagore, ...)

A. Suite de Fibonacci

Au XIII^e siècle, dans son traité mathématique *Liber Abaci*, le mathématicien *Fibonacci* pose le problème suivant :

« Combien de couples de lapins obtiendrons-nous à la fin de l'année si, commençant avec un couple, chacun des couples produisait chaque mois un nouveau couple lequel deviendrait productif au second mois de son existence ? »

Les réponses constituent les nombres de la suite de *Fibonacci* : 1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - ...

1) Expliquer ce résultat et compléter la suite de nombres de *Fibonacci* pour 1^{ère} année.

2) Calculer les valeurs approchées à 10^{-3} près des quotients de deux nombres successifs de la suite de *Fibonacci*

$\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \dots$ et comparer les résultats avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, le *Nombre d'Or*.

B. Fractions à tous les étages

1) Calculer la valeur exacte des quotients suivants :

$$A_1 = 1 + \frac{1}{2} \quad A_2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \quad A_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

2) Calculer la valeur exacte des quotients A_4 , A_5 et A_6 .

3) Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près des résultats et comparer avec le *Nombre d'Or*.

C. Quelques égalités concernant le Nombre d'Or

1) Prouver que φ est une solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

2) Même question avec l'équation $\frac{1}{x} - x + 1 = 0$

D. Le Nombre d'Or en géométrie

Les deux parties qui suivent sont indépendantes.

1^{ère} partie :

1) AIJD est un carré de côté 10 cm. M est le milieu de [DJ] et C est le point de la demi-droite [DJ] tel que $MI = MC$.

B est le point tel que ADCB soit un rectangle.

Calculer la valeur exacte de la longueur MI et en déduire la valeur exacte de la longueur du rectangle ADCB ?

2) Vérifier que le rapport « longueur sur largeur » du rectangle ADCB est égal à φ . Un tel rectangle est appelé *Rectangle d'Or*.

3) Prouver que IBCJ est un *Rectangle d'Or*.

2^{ème} partie :

1) Quelle doit être la longueur d'un rectangle ABCD de largeur $AD = 6$ cm pour qu'il soit un *Rectangle d'Or* ? Donner la valeur exacte puis vérifier qu'une valeur approchée à 10^{-2} près centimètre est 9,71 cm.

2) Dessiner ce rectangle ABCD puis à l'intérieur les carrés AIJD, IBKL, KCNM, JNOP. Dans chaque carré, tracer le quart de cercle de centre J, de rayon JD ; le quart de cercle de centre L, de rayon LI ; le quart de cercle de centre M, de rayon MK ; le quart de cercle de centre O, de rayon ON. Le résultat de la construction est une spirale appelée *Spirale d'Or*.

3) Prouver que la longueur de cette spirale est $3\sqrt{5}\pi$ cm.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales