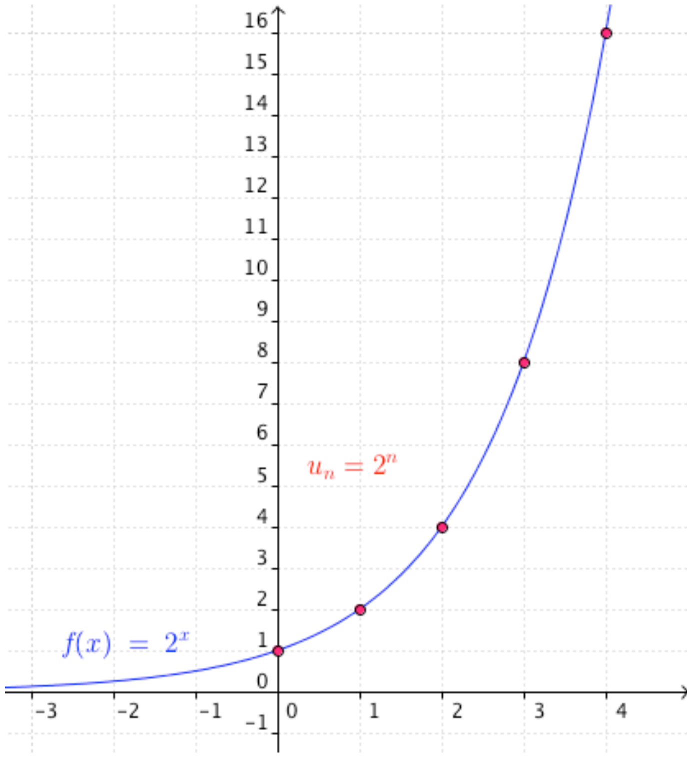
FONCTIONS EXPONENTIELLES (Partie 1)

I. Fonction exponentielle de base q

1) Définition

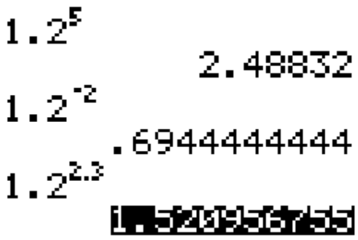
On considère la suite géométrique de raison q définie par $u_n = q^n$.
Elle est définie pour tout entier naturel n.
En prolongeant son ensemble de définition pour tout réel positif, on définit la fonction exponentielle de base q.
Ainsi par exemple :
Pour une suite, on a $u_4 = 2^4$
Pour une fonction, on a $f(4) = 2^4$ mais on a aussi $f(1,3) = 2^{1,3}$



Définition : La fonction $x \mapsto q^x$, avec $q > 0$, s'appelle fonction exponentielle de base q.

Exemple :
La fonction exponentielle de base 1,2 est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 1{,}2^x$.

Remarque : Avec la calculatrice, il est possible de calculer des valeurs d'une fonction exponentielle de base q.



A noter : $x^{0,5} = \sqrt{x}$

Propriété : La fonction exponentielle de base q est définie, strictement positive, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Admis -

2) Propriétés

Relation fonctionnelle : Pour tout réel x et y, on a $q^{x+y} = q^x \times q^y$

- Admis -

Remarque : Cette formule permet de transformer une somme en produit et réciproquement.

Propriétés : Pour tout réel x et y, on a :

a) $q^0 = 1$ et $q^1 = q$

b) $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$

c) $q^{x-y} = \dfrac{q^x}{q^y}$

d) $\left(q^x\right)^n = q^{nx}$ avec n un entier relatif.

Démonstration de b et c :

b) $q^x q^{-x} = q^{x-x} = q^0 = 1$ donc $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$.

c) $q^{x-y} = q^{x+(-y)} = q^x q^{-y} = q^x \dfrac{1}{q^y} = \dfrac{q^x}{q^y}$

Méthode : Simplifier une expression

Vidéo https://youtu.be/PHTOZid0kzM

Simplifier les expressions suivantes :

$A = 4^{-3} \times 4^{-5}$

$B = \dfrac{3^3 \times 3^{-2,5}}{9^5}$

$C = \left(4,8^3\right)^{-2,1} \times 4,8^{6,2}$

$A = 4^{-3} \times 4^{-5}$

$= 4^{-3+(-5)}$

$= 4^{-8}$

$B = \dfrac{3^3 \times 3^{-2,5}}{9^5}$

$= \dfrac{3^3 \times 3^{-2,5}}{\left(3^2\right)^5}$

$= \dfrac{3^{3-2,5}}{3^{2\times 5}}$

$= \dfrac{3^{0,5}}{3^{10}}$

$= 3^{0,5-10} = 3^{-9,5}$

$C = \left(4,8^3\right)^{-2,1} \times 4,8^{6,2}$

$= 4,8^{3\times(-2,1)} \times 4,8^{6,2}$

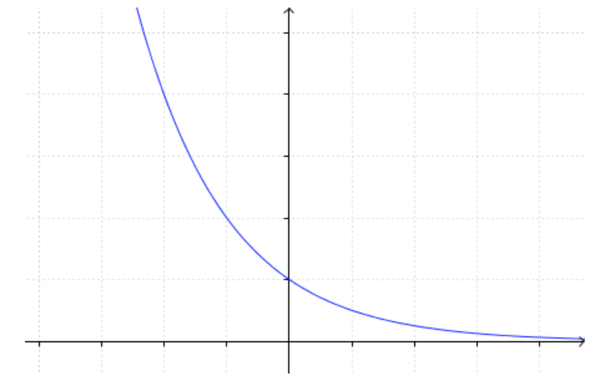
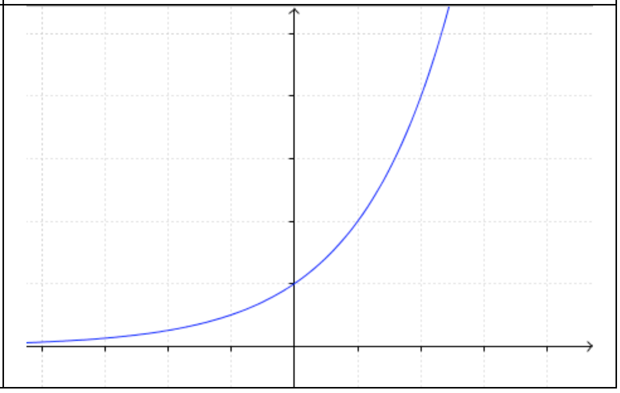
$= 4,8^{-6,3} \times 4,8^{6,2}$

$= 4,8^{-6,3+6,2}$

$= 4,8^{-0,1}$

II. Variations de la fonction exponentielle de base q

Vidéo https://youtu.be/YQoR7CFM_1U

$0 < q < 1$	$q > 1$
$x \mapsto q^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$	$x \mapsto q^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$
$\lim\limits_{x \to -\infty} q^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} q^x = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} q^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} q^x = +\infty$
	

- Admis -

Remarques :

- Si $q = 1$ alors la fonction exponentielle de base q est constante. En effet, dans ce cas, $q^x = 1^x = 1$
- Quel que soit q, la fonction exponentielle de base q passe par le point (0 ; 1). En effet, $q^0 = 1$.
- La fonction exponentielle de base q est convexe.

Méthode : Utiliser une fonction exponentielle de base q

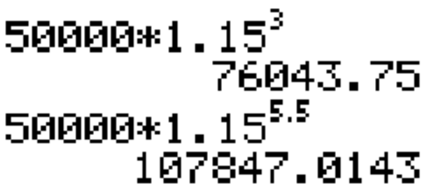
Vidéo https://youtu.be/maK64g-y3gA

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur [0 ; 10] par : $f(x) = 50000 \times 1{,}15^x$.

a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
b) Déterminer les variations de f sur [0 ; 10].
c) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a doublé ?

a) $f(3) = 50000 \times 1{,}15^3 \approx 76000$

$f(5{,}5) = 50000 \times 1{,}15^{5{,}5} \approx 108000$



b) 1,15 > 1 donc la fonction $x \mapsto 1,15^x$ est strictement croissante sur [0 ; 10]. Il en est de même pour la fonction f.

c) Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.

X	Y1
4.91	99311
4.92	99450
4.93	99589
4.94	99728
4.95	99868
4.96	100007
4.97	100147

X=4.96