DÉRIVATION (Partie 2)

I. Fonction dérivée d'une fonction polynôme du troisième degré

Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie par $f(x)=2x^3-3x^2+5x-1$.

Pour déterminer la fonction dérivée f', on applique la technique suivante :

$$f(x)= 2x^{\cancel{3}\,2} - 3x^{\cancel{2}} + 5\cancel{x} \cancel{-1}$$

$$f'(x)=3\times 2x^{2} - 2\times 3x + 5$$

Définition : Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.
On appelle **fonction dérivée** de f, notée f', la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Méthode : Déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme du troisième degré

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x)=x^3-3x^2+2x-5$ b) $g(x)=5x^3+2x^2+2x-7$ c) $h(x)=-2x^3-3x^2-7x+8$
d) $k(x)=-x^3+x^2+1$ e) $l(x)=-4x^3+1$ f) $m(x)=-x^3+7x$

a) $f(x)=x^3-3x^2+2x-5$ donc $f'(x)=3\times x^2-2\times 3x+2=3x^2-6x+2$

b) $g(x)=5x^3+2x^2+2x-7$ donc $g'(x)=3\times 5x^2+2\times 2x+2=15x^2+4x+2$

c) $h(x)=-2x^3-3x^2-7x+8$ donc $h'(x)=-2\times 3\times x^2-2\times 3x-7=-6x^2-6x-7$

d) $k(x) = -x^3 + x^2 + 1$ donc $k'(x) = -3 \times x^2 + 2 \times x = -3x^2 + 2x$

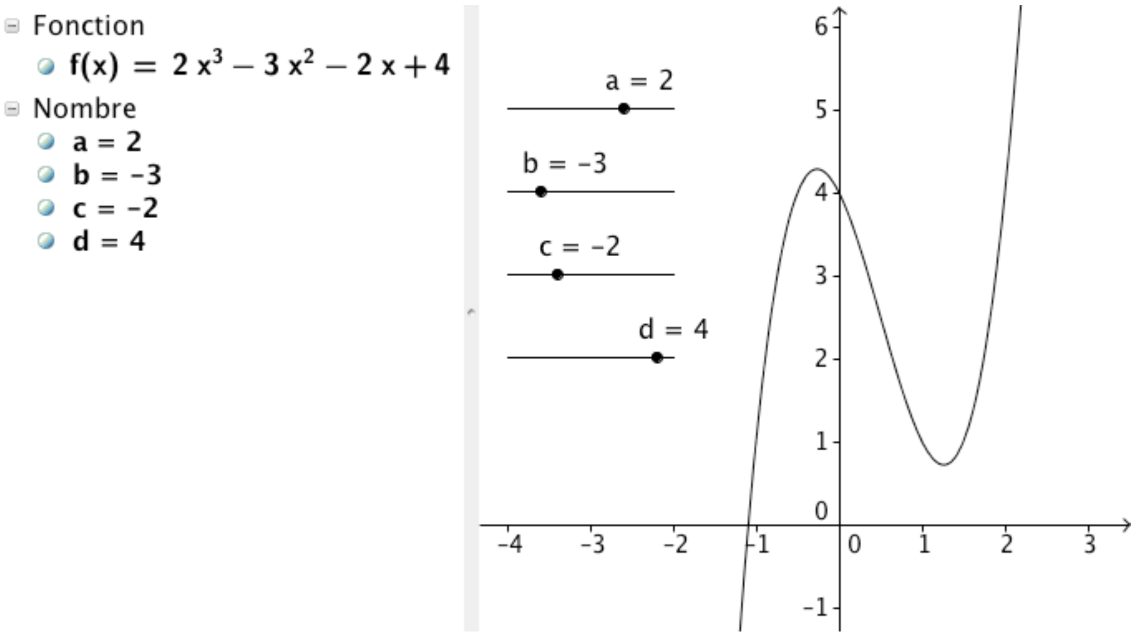
e) $l(x) = -4x^3 + 1$ donc $l'(x) = -3 \times 4x^2 = -12x^2$

f) $m(x) = -x^3 + 7x$ donc $m'(x) = -3 \times x^2 + 7 = -3x^2 + 7$

II. Variations d'une fonction polynôme du troisième degré

1) Observation sur quelques exemples

À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, on observe les variations de quelques fonctions polynômes du troisième degré.



2) Etude des variations à l'aide de la fonction dérivée

Théorème (rappel) : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.

Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du troisième degré

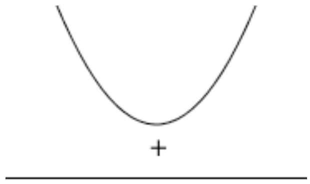
Vidéo https://youtu.be/23_Ba3N0fu4

EXEMPLE 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+2x^2+2x$.
1) Calculer la fonction dérivée de f.
2) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.
4) À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la fonction f.

1) Pour tout x réel, on a : $f'(x)=3x^2+4x+2$.

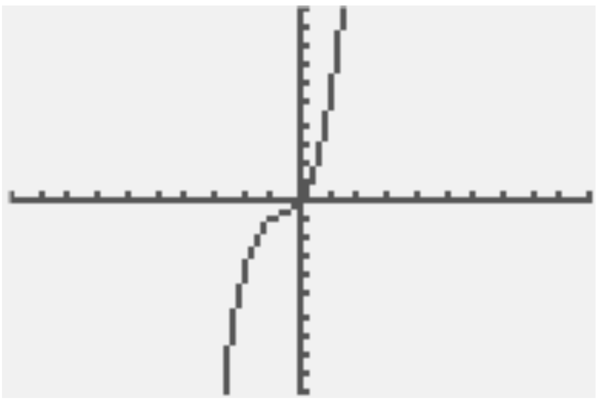
2) Commençons par résoudre l'équation $f'(x)=0$:
Le discriminant du trinôme $3x^2+4x+2$ est égal à $\Delta = 4^2 - 4 \times 3 \times 2 = -8$
$\Delta < 0$ donc l'équation $f'(x)=0$ ne possède pas de solution.
Le coefficient de x^2, égal à 3, est positif, donc la parabole est tournée dans le sens « cuvette ». La dérivée est donc positive pour tout x.



3) On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
f	$\nearrow$

4)

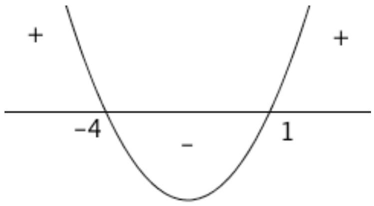


EXEMPLE 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+\frac{9}{2}x^2-12x+5$.
1) Calculer la fonction dérivée de f.
2) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.
4) À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la fonction f.

1) Pour tout x réel, on a : $f'(x)=3x^2+2\times\frac{9}{2}x-12=3x^2+9x-12$.

2) Commençons par résoudre l'équation $f'(x)=0$:
Le discriminant du trinôme $3x^2+9x-12$ est égal à $\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225$
L'équation possède deux solutions : $x_1=\frac{-9-\sqrt{225}}{2\times3}=-4$ et $x_2=\frac{-9+\sqrt{225}}{2\times3}=1$
Le coefficient de x^2, égal à 3, est positif, donc la parabole est tournée dans le sens « cuvette ». La dérivée est donc positive à l'extérieur de ses racines -4 et 1.



3) On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f		↗	61	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	

En effet, $f(-4)=(-4)^3+\frac{9}{2}(-4)^2-12\times(-4)+5=61$ et $f(1)=1^3+\frac{9}{2}\times1^2-12\times1+5=-\frac{3}{2}$.

4)