

CONVEXITÉ

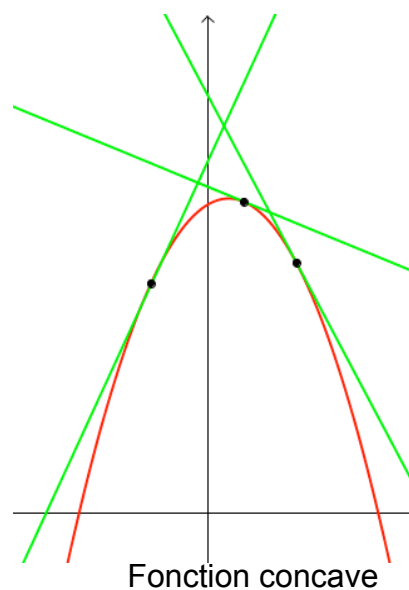
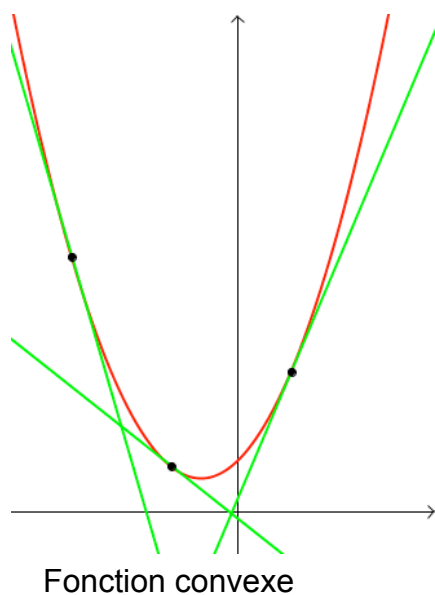
I. Fonction convexe et fonction concave

► Vidéo https://youtu.be/ERML85y_s6E

Définitions : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I .

La fonction f est convexe sur I si, sur l'intervalle I , sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

La fonction f est concave sur I si, sur l'intervalle I , sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



Propriétés :

- La fonction carré $x \mapsto x^2$ est convexe sur \mathbb{R} .
- La fonction cube $x \mapsto x^3$ est concave sur $]-\infty, 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$.
- La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty; 0[$ et convexe sur $]0; +\infty[$.
- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[0; +\infty[$.

- Admis -

Notation :

La dérivée d'une fonction dérivée f' se note f'' .

Propriété : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I .

La fonction f est convexe sur I si sa dérivée f' est croissante sur I , soit

$$f''(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \text{ de } I.$$

La fonction f est concave sur I si sa dérivée f' est décroissante sur I , soit

$$f''(x) \leq 0 \text{ pour tout } x \text{ de } I.$$

- Admis -

Méthode : Etudier la convexité d'une fonction

▶ Vidéo <https://youtu.be/8H2aYKN8NGE>

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$.

Etudier la convexité de la fonction f .

Pour tout x de \mathbb{R} , on a $f'(x) = x^2 - 18x$.

Pour tout x de \mathbb{R} , on a $f''(x) = 2x - 18$ qui s'annule pour $x = 9$.

Pour tout $x \leq 9$, $f''(x) \leq 0$

Pour tout $x \geq 9$, $f''(x) \geq 0$

f' est donc strictement décroissante sur $]-\infty; 9]$ et donc f est concave sur $]-\infty; 9]$.

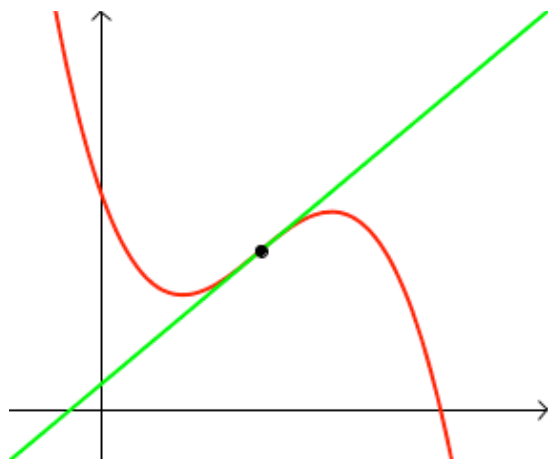
f' est donc strictement croissante sur $[9; +\infty[$ et donc f est convexe sur $[9; +\infty[$.

II. Point d'inflexion

▶ Vidéo <https://youtu.be/r8sYr6ToeLo>

Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I .

Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.



Remarque importante :

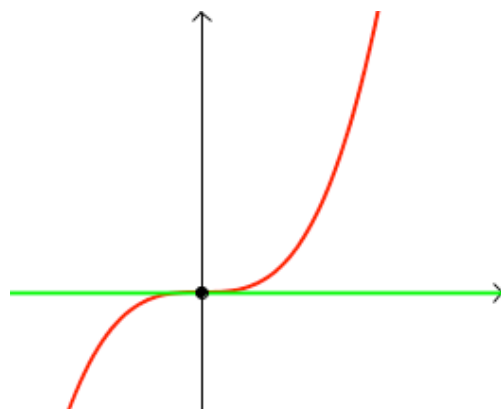
Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

Exemple :

On considère la fonction cube $x \mapsto x^3$.

La tangente au point $O(0,0)$ est l'axe des abscisses.

Pour $x \leq 0$, la courbe est en dessous de sa tangente.



Pour $x \geq 0$, la courbe est au-dessus de sa tangente.

La tangente à la courbe en O traverse donc la courbe.
Le point O est un point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.

Méthode : Etudier la convexité pour résoudre un problème

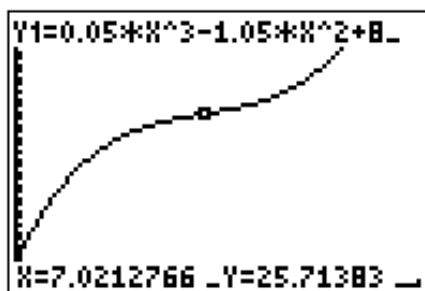
📺 Vidéo https://youtu.be/_XlqCeLcN1k

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10000 par mois. Le coût de fabrication C (en milliers d'euros) de x milliers de clés produites s'exprime par :

$$C(x) = 0,05x^3 - 1,05x^2 + 8x + 4.$$

- 1) À l'aide de la calculatrice graphique, évaluer la convexité de la fonction C . En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.
- 2) Démontrer ces résultats.
- 3) Interpréter les résultats obtenus.

1) La fonction semble concave sur l'intervalle $[0 ; 7]$ et convexe sur l'intervalle $[7 ; 10]$. La courbe semble posséder un point d'inflexion pour $x = 7$.



$$2) C(x) = 0,05x^3 - 1,05x^2 + 8x + 4$$

$$C'(x) = 0,15x^2 - 2,1x + 8$$

$$C''(x) = 0,3x - 2,1$$

Or $0,3x - 2,1 = 0$ pour $x = 7$.

On peut ainsi résumer les variations de C' et la convexité de C dans le tableau suivant :

x	0	7	10
$C''(x)$	-	0	+
$C'(x)$	↘		↗
Convexité de C	concave		convexe

$$C(7) = 25,7.$$

Ainsi, le point de coordonnées (7 ; 25,7) est un point d'inflexion de la courbe.

3) Après le point d'inflexion, la fonction est convexe, la croissance du coût de fabrication C s'accélère. Avant le point d'inflexion, la fonction est concave, la croissance du coût de fabrication ralentie.

Ainsi, à partir de 7000 clés produites, la croissance du coût de fabrication s'accélère.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales