

CONDITIONNEMENT (Partie 2)

I. Règles d'usage d'un arbre pondéré

1) Exemple

▶ Vidéo <https://youtu.be/Pc5kJBkPDbo>

Un sac contient 50 boules, dont 20 boules rouges et 30 boules noires, où il est marqué soit "Gagné" ou soit "Perdu"

Sur 15 boules rouges, il est marqué Gagné.

Sur 9 boules noires, il est marqué Gagné.

On tire au hasard une boule dans le sac.

Soit R l'événement "On tire une boule rouge".

Soit G l'événement "On tire une boule marquée Gagné"

Donc $R \cap G$ est l'événement "On tire une boule rouge marquée Gagné".

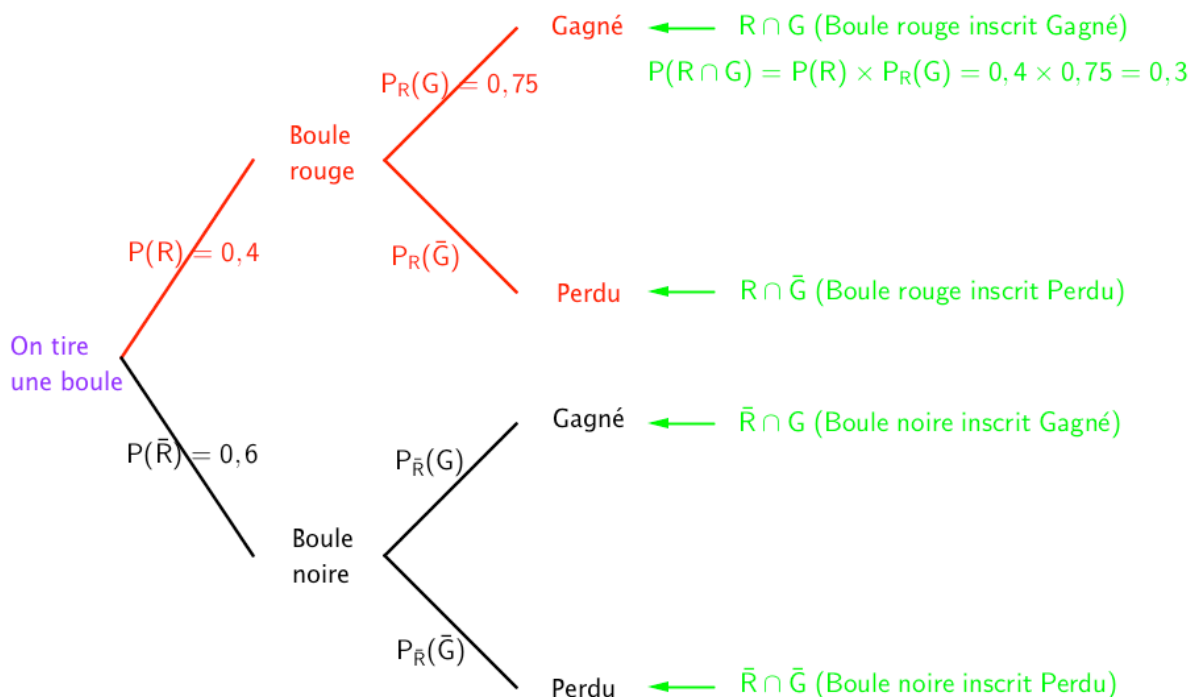
Alors : $P(R) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 0,4$ et $P(R \cap G) = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0,3$.

Donc la probabilité qu'on tire une boule marquée Gagné sachant qu'elle est rouge

est : $P_R(G) = \frac{P(R \cap G)}{P(R)} = \frac{0,3}{0,4} = \frac{3}{4} = 0,75$.

On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, sachant que le résultat est une boule rouge, on a 15 chances sur 20 qu'il soit marqué Gagné.

L'expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré (ou arbre de probabilité) :



2) Règles

Règle 1 : La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Exemples :

- A partir du nœud "On tire une boule", on a : $P(R) + P(\bar{R}) = 0,4 + 0,6 = 1$
- A partir du nœud "Boule rouge", on a : $P_R(\bar{G}) = 1 - P_R(G) = 1 - 0,75 = 0,25$.

Ces exemples font apparaître une formule donnée au paragraphe I.

Règle 2 : La probabilité d'une "feuille" (extrémité d'un chemin) est égale au produit des probabilités du chemin aboutissant à cette feuille.

Exemple :

On considère la feuille $R \cap G$.

On a : $P(R \cap G) = P(R) \times P_R(G) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$

II. Formule des probabilités totales

Règle 3 (Formule des probabilités totales) : La probabilité d'un événement associé à plusieurs "feuilles" est égale à la somme des probabilités de chacune de ces "feuilles".

Exemple :

L'événement "On tire une boule marquée Gagné" est associé aux feuilles $R \cap G$ et $\bar{R} \cap G$. On a :

$$P(R \cap G) = 0,3 \text{ et}$$

$$P(\bar{R} \cap G) = \frac{9}{50} = 0,18 \text{ (Probabilité de tirer une boule noire marquée Gagné)}$$

$$\text{Donc } P(G) = P(R \cap G) + P(\bar{R} \cap G) = 0,3 + 0,18 = 0,48.$$

Méthode : Calculer la probabilité d'un événement associé à plusieurs feuilles

 Vidéo <https://youtu.be/qTpTBoZA7zY>

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

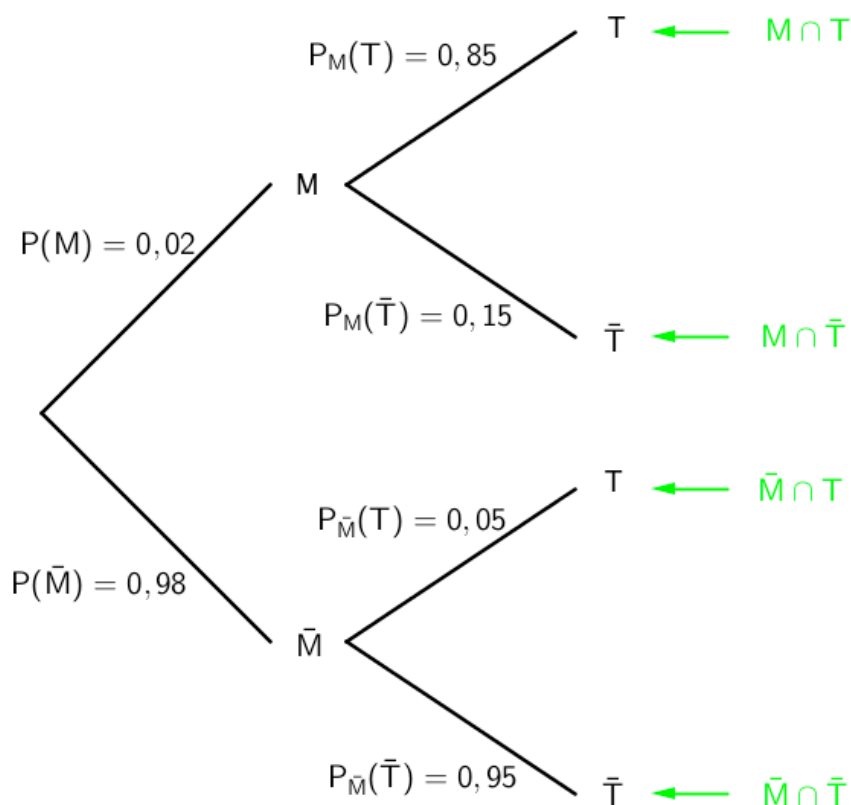
On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note respectivement M et T les événements « Être porteur de la maladie » et « Avoir un test positif ».

1) Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?

D'après BAC S, Antilles-Guyanne 2010

2) Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?



1) La probabilité que le test soit positif est associée aux deux feuilles $M \cap T$ et $\bar{M} \cap T$.

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) \text{ (formule des probabilités totales)}$$

$$= 0,02 \times 0,85 + 0,98 \times 0,05 = 0,066.$$

La probabilité que le test soit positif est égale à 6,6%.

$$2) P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0,02 \times 0,85}{0,066} \approx 0,26.$$

La probabilité que le bovin soit malade sachant que le test est positif est d'environ 26%.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales