

# PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

## I. Exemple d'introduction

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints d'une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B. Le tableau présente les résultats de l'étude :

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

1) On choisit au hasard un patient et on considère les évènements suivants :

A : « Le patient a pris le médicament A. »

G : « Le patient est guéri. »

On a alors :

La probabilité qu'un patient soit traité avec le médicament A est égale à

$$P(A) = \frac{455}{800} \approx 0,57 = 57\% .$$

La probabilité qu'un patient soit guéri est égale à  $P(G) = \frac{674}{800} \approx 0,84 = 84\% .$

La probabilité qu'un patient soit guéri et qu'il soit traité par le médicament A est égale

$$\text{à } P(G \cap A) = \frac{383}{800} \approx 0,48 = 48\% .$$

La probabilité qu'un patient ne soit pas guéri et qu'il soit traité par le médicament A

$$\text{est égale à } P(\bar{G} \cap A) = \frac{72}{800} = 0,09 = 9\% .$$

2) On choisit maintenant au hasard un patient guéri.

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

La probabilité que le patient ait pris le médicament A sachant qu'il est guéri se note

$$P_G(A) \text{ et est égale à } P_G(A) = \frac{383}{674} \approx 0,57 = 57\% .$$

La probabilité que le patient soit guéri sachant qu'il a pris le médicament B se note

$$P_B(G) \text{ et est égale à } P_B(G) = \frac{291}{345} \approx 0,84 = 84\% .$$

**Définition :**

On appelle probabilité conditionnelle de  $B$  sachant  $A$ , la probabilité que l'événement  $B$  se réalise sachant que l'événement  $A$  est réalisé. On la note :  $P_A(B)$

**II. Arbre pondéré**

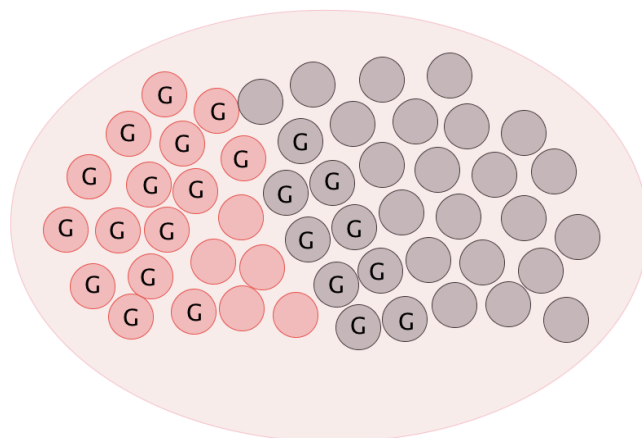
📺 Vidéo <https://youtu.be/Pc5kJBkPDbo>

## 1) Règles de calcul

Un sac contient 50 boules, dont :

- 20 boules rouges,
  - 30 boules noires,
- où il est marqué soit "Gagné" ou soit "Perdu".

- Sur 15 boules rouges, il est marqué Gagné.
- Sur 9 boules noires, il est marqué Gagné.



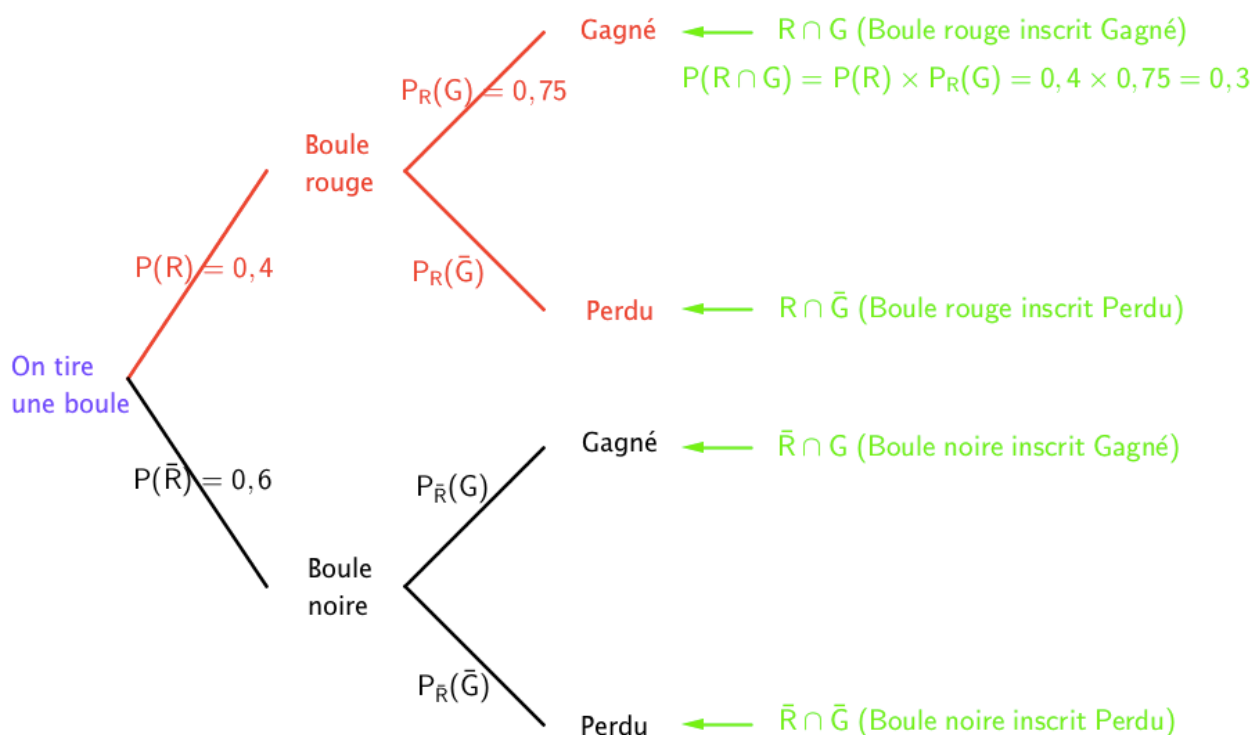
On tire au hasard une boule dans le sac.

Soit  $R$  l'événement "On tire une boule rouge".

Soit  $G$  l'événement "On tire une boule marquée Gagné".

Soit  $R \cap G$  est l'événement "On tire une boule rouge marquée Gagné".

L'expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré (ou arbre de probabilité) :



$$a) P(R) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 0,4$$

**Règle 1 : À partir d'un même nœud, la somme des probabilités est égale à 1.**

À partir du nœud "On tire une boule", on a :  $0,4 + P(\bar{R}) = 1$

Donc  $P(\bar{R}) = 1 - 0,4 = 0,6$ .

b) La probabilité qu'on tire une boule marquée Gagné sachant qu'elle est rouge est :

$$P_R(G) = \frac{15}{20} = 0,75.$$

**Règle 2 : Pour calculer la probabilité d'un chemin, on multiplie les probabilités des branches de ce chemin.**

On considère le chemin menant à  $R \cap G$ .

On a :  $P(R \cap G) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$

c) La probabilité qu'on tire une boule marquée Gagné sachant qu'elle est noire est :

$$P_{\bar{R}}(G) = \frac{9}{30} = 0,3.$$

Et donc  $P(\bar{R} \cap G) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$

d) L'événement "On tire une boule marquée Gagné" est associé aux chemins menant à  $R \cap G$  et  $\bar{R} \cap G$ .

Donc  $P(G) = P(R \cap G) + P(\bar{R} \cap G) = 0,3 + 0,18 = 0,48$ .

**Règle 3 (Formule des probabilités totales) : La probabilité d'un événement associé à plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités de chacun de ces chemins.**

## 2) Utilisation d'un arbre pondéré

**Méthode :** Calculer des probabilités conditionnelles à l'aide d'un arbre

 **Vidéo** <https://youtu.be/qTpTBoZA7zY>

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

- sachant qu'un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- sachant qu'un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

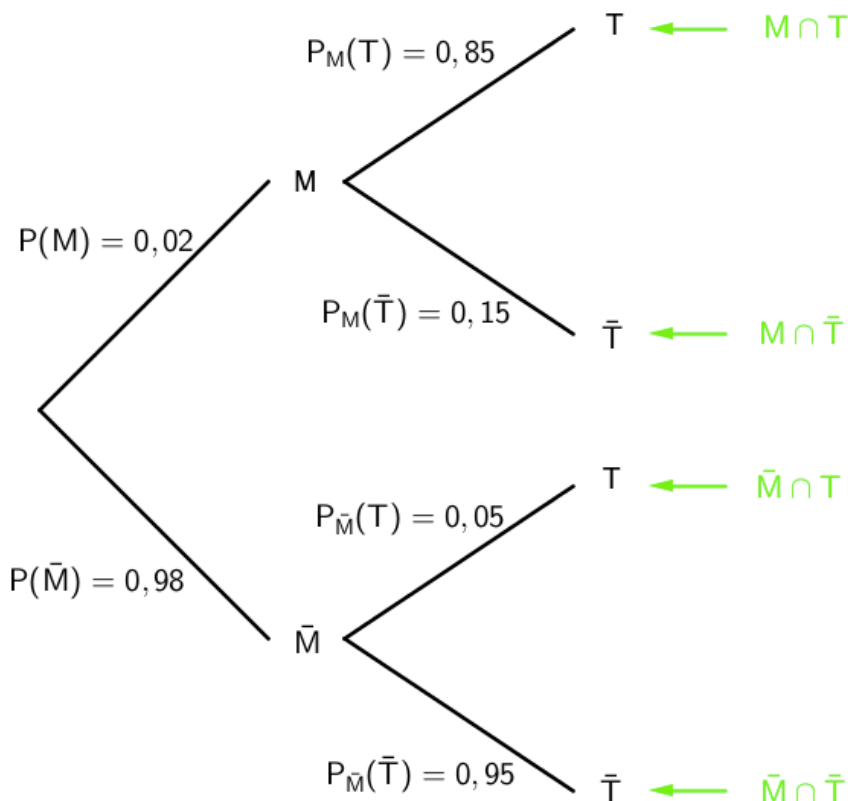
On note les événements :

$M$  : « Être porteur de la maladie »  
 $T$  : « Avoir un test positif ».

- 1) Construire un arbre pondéré traduisant les données de l'énoncé.
- 2) Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?
- 3) Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

*D'après BAC S (et oui !), Antilles-Guyanne 2010*

1)



2) La probabilité que le test soit positif est associée aux événements :  
 $M \cap T$  et  $\bar{M} \cap T$ .

$$P(M \cap T) = 0,02 \times 0,85 = 0,017 \text{ (règle 2)}$$

$$P(\bar{M} \cap T) = 0,98 \times 0,05 = 0,049$$

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) \text{ (règle 3)} \\ = 0,017 + 0,049 = 0,066.$$

La probabilité que le test soit positif est égale à 6,6%.

3)

**Propriété :**  $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0,02 \times 0,85}{0,066} \approx 0,26.$$

La probabilité que le bovin soit malade sachant que le test est positif est d'environ 26%. Le test n'est pas fiable !



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)