APPLICATIONS DE LA DERIVATION

I. Application à l'étude des variations d'une fonction

Théorème : Soit une fonction *f* définie et dérivable sur un intervalle I.
- Si $f'(x) \leq 0$, alors *f* est décroissante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors *f* est croissante sur I.

- Admis -

Remarque :
Les propriétés réciproques restent vraies.

Méthode : Dresser le tableau de variations d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/23_Ba3N0fu4

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.

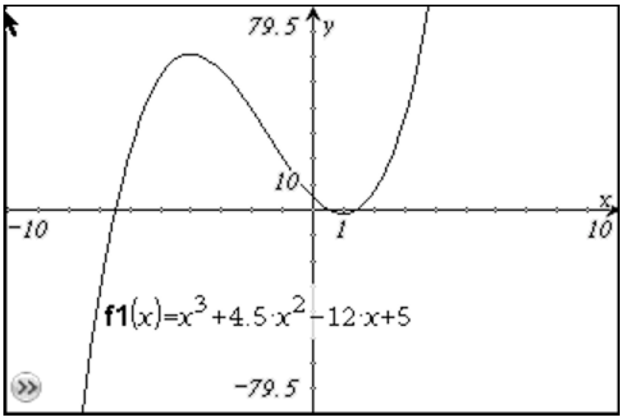
1) Etudier les variations de *f* et dresser le tableau de variation.
2) Dans repère, représenter graphiquement la fonction *f*.

1) Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 3x^2 + 9x - 12$.
Commençons par résoudre l'équation $f'(x) = 0$:
Le discriminant du trinôme $3x^2 + 9x - 12$ est égal à Δ = 9^2 – 4 x 3 x (-12) = 225
L'équation possède deux solutions : $x_1 = \frac{-9 - \sqrt{225}}{2 \times 3} = -4$ et $x_2 = \frac{-9 + \sqrt{225}}{2 \times 3} = 1$

On en déduit le tableau de variations de *f* :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f		↗	61	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	

2)



II. Extremum d'une fonction

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.
Si la dérivée f' de f s'annule et change de signe en un réel *c* de I alors f admet un extremum en x = *c*.

- Admis -

Méthode : Rechercher un extremum

Vidéo https://youtu.be/zxyKLqnIMlk

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5x^2-3x+4$ admet-elle un extremum sur $\mathbb{R}$?

Pour tout x réel, on a : $f'(x)=10x-3$

Et : $f'(x)=0$ pour $x=\dfrac{3}{10}$.

On dresse alors le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\dfrac{3}{10}$		$+\infty$
f'		-	0	+	
f		↘	$\dfrac{71}{20}$	↗	

En effet : $f\left(\dfrac{3}{10}\right)=\dfrac{71}{20}$.

La fonction f admet donc un minimum égal à $\dfrac{71}{20}$ en $x=\dfrac{3}{10}$.

III. Application à l'étude des variations d'une suite

Propriété : Soit une fonction f définie sur $\left[0;+\infty\right[$ et une suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.
- Si f est croissante sur l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration :
- f est croissante sur $\left[0;+\infty\right[$ donc par définition d'une fonction croissante, on a pour tout entier n : comme $n+1>n$, $f(n+1)\geq f(n)$ et donc $u_{n+1}\geq u_n$.
- Démonstration analogue pour la décroissance.

Méthode : Etudier les variations d'une suite à l'aide de la fonction associée

Vidéo **https://youtu.be/dPR3GyQycH0**

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

On considère la fonction associée f définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

Ainsi $u_n = f(n)$.

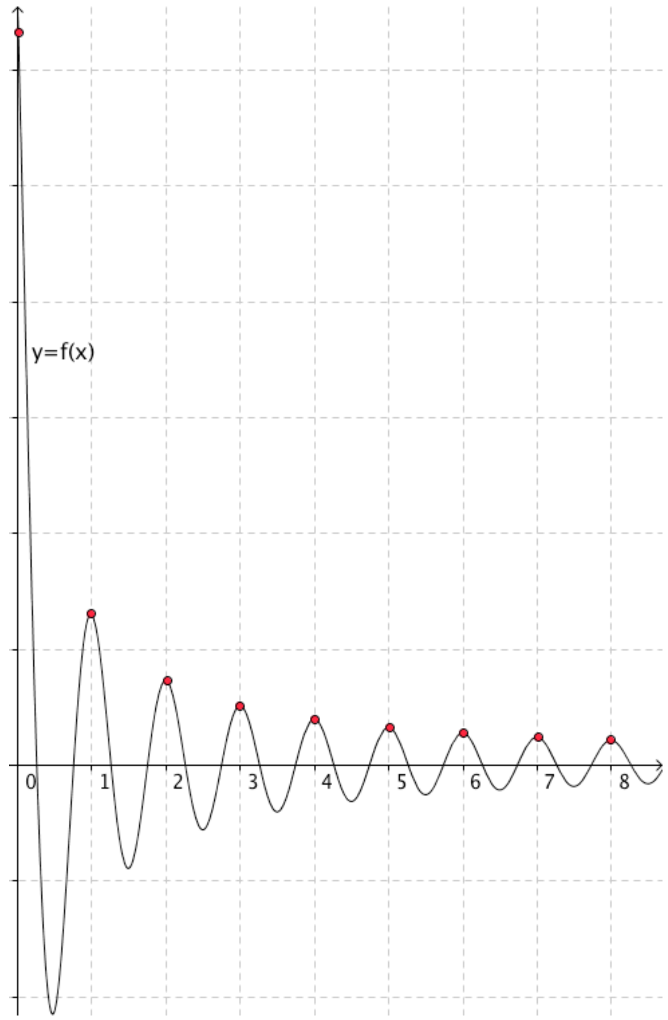
Etudions les variations de f définie sur $\left[0;+\infty\right[$:

$f'(x)=\dfrac{-1}{(x+1)^2}$.

Pour tout x de $\left[0;+\infty\right[$, on a : $f'(x)<0$.

Donc f est décroissante sur $\left[0;+\infty\right[$. On en déduit que (u_n) est décroissante.

Remarque :
La réciproque de la propriété énoncée plus haut est fausse.
La représentation suivante montre une suite décroissante alors que la fonction f n'est pas monotone.


y=f(x)
0
1
2
3
4
5
6
7
8