MATRICES – Chapitre 1/2



Le mot « matrice » vient du latin « mater » (mère). Comme on enregistrait les enfants à la naissance dans des registres, le mot désigna ces registres. Cela explique les mots « matricule » ou « immatriculation ».

Avec les mathématiciens Augustin Louis Cauchy (ci-contre) et Arthur Cayley, vers 1845, le mot prend naturellement le sens mathématique qu’on lui connaît aujourd’hui.

**Partie 1 : Généralités sur les matrices**

Définition : Une **matrice** de taille est un tableau de nombres formé de lignes et colonnes.

Une telle matrice s'écrit sous la forme :

Les nombres sont appelés les **coefficients** de la matrice.

Exemple : est une matrice de taille 2 x 3.

Définition : Une matrice de taille est appelée une **matrice carrée** de taille .

Exemple : est une matrice carrée de taille 2.

Définitions : Une matrice de taille est appelée une **matrice colonne**.

Une matrice de taille est appelée une **matrice ligne**.

Exemple : - est une matrice ligne de dimension 1 x 3.

- Les coordonnées d'un vecteur du plan est une matrice colonne de dimension 2 x 1.

Propriété : Deux matrices sont égales si, et seulement si, elles ont la même taille et ont les coefficients égaux placés aux mêmes positions.

**Partie 2 : Opérations sur les matrices**

1) Somme de matrices

Définition : Soit et deux matrices de même taille.

La **somme** de et est la matrice, notée , dont les coefficients sont obtenus en additionnant deux à deux des coefficients qui ont la même position dans et .

Exemple :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/MMBfOom\_mac**](https://youtu.be/MMBfOom_mac)

et alors

Remarque :

Cette définition montre qu'il n'est possible d'additionner que des matrices **de même taille**.

Propriétés : Soit , et trois matrices carrées de même taille.

a) Commutativité :

b) Associativité :

2) Produit d'une matrice par un réel

Définition : Soit une matrice et un nombre réel.

La **produit de par le réel** est la matrice, notée , dont les coefficients sont obtenus en multipliant tous les coefficients de par .

Exemple :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/B3NAaW1Ap\_I**](https://youtu.be/B3NAaW1Ap_I)

alors

Propriétés : Soit et deux matrices carrées de même taille et deux réels et .

a) b) c)

3) Produit d'une matrice carrée par une matrice colonne

Définition : Soit une matrice carrée de taille et une matrice colonne à lignes telles que :

et

Le **produit de la matrice carrée par la matrice colonne**  est la matrice colonne à lignes, notée et égale à :

Exemple :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/nW8XRIhlq0Q**](https://youtu.be/nW8XRIhlq0Q)

et alors

4) Produit de deux matrices carrées

Définition : Soit et deux matrices carrées de même taille.

La **produit de et**  est la matrice, notée , dont les colonnes correspondent au produit de la matrice par chaque colonne de la matrice .

Exemple :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ZOtgQxB5NXI**](https://youtu.be/ZOtgQxB5NXI)

et alors :

et

Remarque :

La multiplication de matrices n'est Divertissement 😳

Une image contenant texte, Police, écriture manuscrite, nombre

Description générée automatiquementpas commutative :

Propriétés : Soit , et trois matrices carrées de même taille et un réel .

a) Associativité

b) Distributivité : et

c) avec réel.

5) Puissance d'une matrice carrée

Définition : Soit une matrice carrée et un entier naturel.

Le carré de est la matrice, noté , égale à .

Le cube de est la matrice, noté , égale à .

Plus généralement, la puissance *n*-ième de est la matrice, notée , égale au produit de facteurs .

Exemple :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/r81z2eLd07w**](https://youtu.be/r81z2eLd07w)

Soit une matrice diagonale.

Alors

En effet, on constate après calcul que tous les coefficients qui ne se trouvent pas sur la diagonale s'annulent et que sur la diagonale, les coefficients de sont égaux aux carrées des coefficients de .

On peut généraliser cette règle à une puissance quelconque.

Ainsi par exemple,

Curiosité mathématique :

Vérifier que : ou encore que  !

Méthode : Utiliser la calculatrice pour effectuer des calculs matriciels

 **Vidéo TI** [**https://youtu.be/8c4WDe1PSZk**](https://youtu.be/8c4WDe1PSZk)

 **Vidéo Casio** [**https://youtu.be/zq5OHgdTw34**](https://youtu.be/zq5OHgdTw34)

 **Vidéo HP** [**https://youtu.be/9a\_rRHabIF8**](https://youtu.be/9a_rRHabIF8)

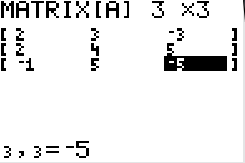
On veut calculer le carré de la matrice .

**Correction**

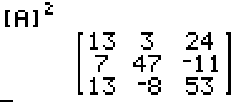
Avec une TI :

Entrer dans le mode "Matrice" (MATRIX) puis "EDIT".

Saisir la taille de la matrice puis ses coefficients.



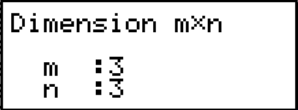
Quittez (QUIT) puis entrer à nouveau dans le mode "Matrice" et sélectionner la matrice A et compléter la formule pour élever A au carré.



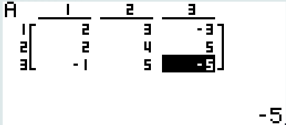
Avec une CASIO:

Entrer dans le menu "RUN.MAT" puis choisir "MAT" (Touche F1).

Choisir une matrice et saisir sa taille dans la fenêtre qui s'ouvre.



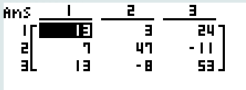
Saisir ensuite les coefficients de la matrice.



Quitter le mode d'édition (QUIT) et taper sur la touche "Mat" puis saisir le calcul.

Capture d’écran 2012-06-14 à 23

On obtient le résultat :



**Partie 3 : Matrice inverse**

1) Matrice unité (ou identité)

Définition : On appelle **matrice unité** de taille la matrice carrée formée de lignes et colonnes, tel que :

Remarque : La matrice unité est une matrice carrée avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

Propriété : Pour toute matrice carrée de taille , on a :

Exemple :

alors :

2) Matrice inverse d'une matrice carrée

Définition : Une matrice carrée de taille est une **matrice inversible** s'il existe une matrice telle que .

La matrice , notée est appelée la **matrice inverse** de .

Exemple :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/FAvptVYvfb0**](https://youtu.be/FAvptVYvfb0)

et

Les matrices et sont donc inverses l'une de l'autre.

Remarque :

Toutes les matrices ne sont pas inversibles.

 **Vidéo** [**https://youtu.be/pHIepnbQaCQ**](https://youtu.be/pHIepnbQaCQ)

Propriété : La matrice est inversible si, et seulement si, .

Démonstration :

Soit .

Alors .

Si , on a  soit donc *A* est inversible.

Si , alors donc n'est pas inversible. Car si était inversible d'inverse la matrice , on aurait et

Et donc . Ce qui est impossible.

Méthode : Calculer l'inverse d'une matrice carrée de taille 2

 **Vidéo** [**https://youtu.be/4QMzwWY6T7g**](https://youtu.be/4QMzwWY6T7g)

Calculer l'inverse de la matrice .

**Correction**

On a : soit

Donc :

Et donc :

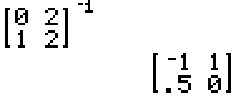
D'où .

On peut vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice :

Il est possible de faire une saisie en ligne sans passer par le menu "Matrice".

Capture d’écran 2012-06-16 à 09

On obtient l'affichage suivant et le résultat :



Propriété : Soit une matrice carrée inversible de taille , et et deux matrices carrées ou colonnes de taille . On a :

, si et seulement si,

Démonstration :

Comme , on a :



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)