VARIABLES ALÉATOIRES – Chapitre 1/2

 **Tout le cours sur la loi binomiale en vidéo :** [**https://youtu.be/xMmfPUoBTtM**](https://youtu.be/xMmfPUoBTtM)

**Partie 1 : Espérance d’une variable aléatoire**

Définition : L'**espérance mathématique** de est :

L'espérance est la moyenne que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Méthode : Calculer l’espérance d’une variable aléatoire

** Vidéo** [**https://youtu.be/AcWVxHgtWp4**](https://youtu.be/AcWVxHgtWp4)

Soit l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."

On considère le jeu suivant :

* Si on tire un cœur, on gagne 2 €.
* Si on tire un roi, on gagne 5 €.
* Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l’espérance de X et interpréter le résultat.

**Correction**

a) La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 2, 5, –1 mais aussi 7.

En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne 5(roi) + 2(cœur) = 7 €.

- Si la carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), X = 2.

P(X = 2) = .

- Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur), X = 5.

P(X = 5) = .

- Si la carte tirée est le roi de cœur, X = 7.

P(X = 7) = .

- Si la carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, X = –1.

P(X = –1) = .

La loi de probabilité de est :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | –1 | 2 | 5 | 7 |
|  |  |  |  |  |

b)

L'espérance est égale à signifie qu'en jouant un grand nombre de fois, on peut espérer gagner en moyenne environ 0,50 €.

**Partie 2 : Schéma de Bernoulli, loi binomiale**

1) Épreuve de Bernoulli

Exemples :

1) Le jeu du pile ou face : On considère comme succès "obtenir pile" et comme échec "obtenir face". La probabilité d’un succès est égale à .

2) On lance un dé et on considère comme succès "obtenir un six" et comme échec "ne pas obtenir un six". La probabilité d’un succès est égale à .

Définition : Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues que l'on peut nommer "succès" ou "échec".

2) Schéma de Bernoulli

Exemple : La répétition de 10 lancers d'une pièce de monnaie est un schéma de Bernoulli de paramètres = 10 et = .

Définition : Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes pour lesquelles la probabilité du succès est .

3) Loi binomiale

Si dans un schéma de Bernoulli, on répète la même expérience fois, alors il est possible d’obtenir 0 succès, 1 succès, 2 succès, … ou succès.

Définition : On réalise un schéma de Bernoulli composé de épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

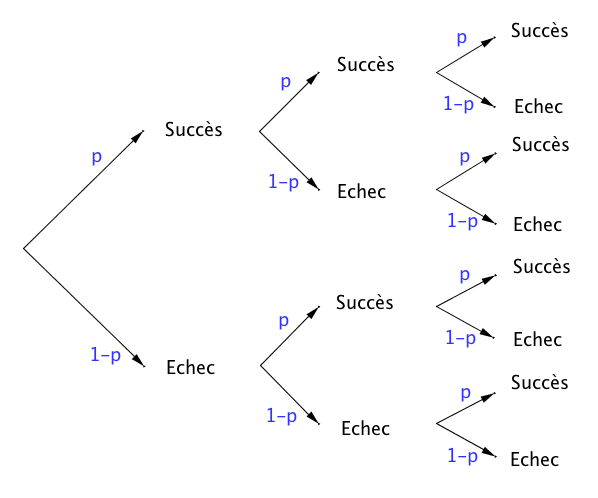
Une **loi binomiale** est une loi de probabilité qui donne le nombre de succès de l'expérience.

Remarque : et sont les paramètres de la loi binomiale et on note .

Exemple :

On a représenté dans un arbre de probabilité les issues d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre p.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.



On a par exemple :

- P(X = 3) = p3.

En effet, en suivant les branches sur le haut de l'arbre, on arrive à 3 succès avec une probabilité de p p p = p3.

- X = 2 correspond aux suites d'issues suivantes :

(Succès ; Succès ; Échec)

(Succès ; Échec ; Succès)

(Échec ; Succès ; Succès)

Donc P(X = 2) = 3 p2 (1 – p)

En effet, les branches qui correspondent à 2 succès et 1 échec, donnent une probabilité de :

p p (1 – p) = p2 (1 – p).

Il y a 3 branches de ce type, soit : 3 x p2 (1 – p)

# Méthode : Calculer une probabilité avec une loi binomiale à l'aide d'un arbre

 **Vidéo** [**https://youtu.be/b18\_r8r4K2s**](https://youtu.be/b18_r8r4K2s)



On tire trois fois de suite avec remise une carte dans un jeu de 4 cartes qui contient une carte *Némo*. On considère comme succès l’événement « Obtenir la carte *Némo*. »

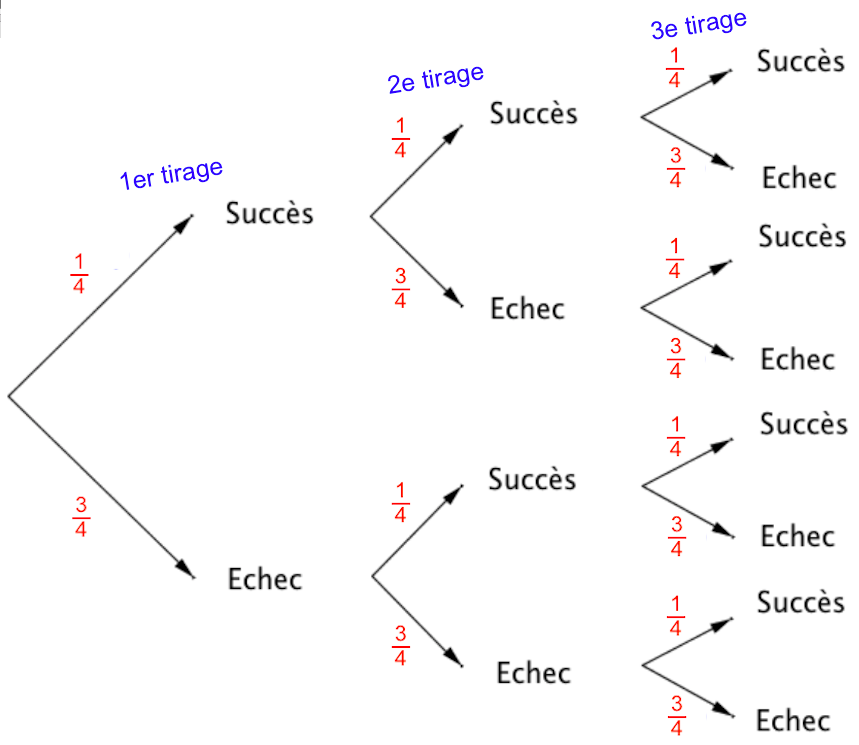
est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Calculer Interpréter le résultat.

**Correction**

La variable aléatoire suit la loi binomiale de paramètres et = .

On représente dans un arbre de probabilité les issues de l’expérience composée de 3 tirages.



**➔ SSS**

**➔ SSE \***

**➔ SES \***

**➔ SEE**

**➔ ESS \*  
  
  
➔ ESE**

**➔ EES  
  
  
➔ EEE**

À l’issue du chemin, on comptabilise les succès et les échecs ⇡

On cherche à calculer , on repère donc les chemins présentant deux succès (\*). On en compte 3.

Chacun de ces chemins correspond au calcul de probabilité :

Et donc :

La probabilité d’obtenir deux fois la carte *Némo* sur 3 tirages est égale à .

4) Avec la calculatrice ou un tableur

Méthode : Utiliser une loi binomiale

 **Vidéo** [**https://youtu.be/7k4ZYdfWEY8**](https://youtu.be/7k4ZYdfWEY8)-Tuto TI

 **Vidéo** [**https://youtu.be/69IQIJ7lyww**](https://youtu.be/69IQIJ7lyww)- Tuto Casio

 **Vidéo** [**https://youtu.be/clrAMXKrPV4**](https://youtu.be/clrAMXKrPV4)- Tuto HP

On lance 7 fois de suite un dé à 6 faces.

Soit la variable aléatoire égale au nombre de fois que le dé affiche un nombre supérieur ou égal à 3.

a) Quelle est la loi suivie par  ?

b) Calculer la probabilité .

c) Calculer la probabilité .

d) Calculer la probabilité .

**Correction**

a) On répète **7 fois** une expérience à deux issues : {3 ; 4 ; 5 ; 6} et {1 ; 2}.

Le **succès** est d’obtenir {3 ; 4 ; 5 ; 6}.

La **probabilité du succès** sur un tirage est égale à = .

suit donc une loi binomiale de paramètres : = 7 et = .

b) Avec Texas Instruments :

Touches « *2nd*» et « *VAR*» puis choisir « *binomFdP* ».

Et saisir les paramètres de l’énoncé : binomFdP(7,2/3,5)

Avec Casio :

Touche « *OPTN*» puis choisir « *STAT*», « *DIST* », « *BINM* » et « *Bpd* »*.*

Et saisir les paramètres de l’énoncé : BinominalePD(5,7,2/3)

Avec le tableur :

Saisir dans une cellule : =LOI.BINOMIALE(5;7;2/3;0)

On trouve 0,31.

La probabilité d’obtenir 5 fois un nombre supérieur ou égal à 3 est environ égale à 0,31.

c) Avec Texas Instruments :

Touches « *2nd*» et « *VAR*» puis choisir « *binomFRép* ».

Et saisir les paramètres de l’énoncé : binomFRép(7,2/3,5)

Avec Casio :

Touche « *OPTN*» puis choisir « *STAT*», « *DIST* », « *BINM* » et « *Bcd* »*.*

Et saisir les paramètres de l’énoncé : BinominaleCD(5,7,2/3)

Avec le tableur :

Saisir dans une cellule : =LOI.BINOMIALE(5;7;2/3;1)

On trouve 0,74.

La probabilité d’obtenir au plus 5 fois un nombre supérieur ou égal à 3 est environ égale à 0,74.

d)

(à l’aide de la calculatrice ou du tableur)

5) Représentation graphique

Méthode : Établir une loi binomiale avec une calculatrice ou un tableur

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8f-cfVFHIxg**](https://youtu.be/8f-cfVFHIxg)- Tuto TI

 **Vidéo** [**https://youtu.be/l9OoHVRpM8U**](https://youtu.be/l9OoHVRpM8U)- Tuto Casio

Soit une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre = 5 et = 0,4.

Représenter graphiquement la loi suivie par par un diagramme en bâtons.

**Correction**

On commence par afficher le tableau de valeurs exprimant pour *k* entier,

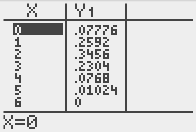
.

Avec Texas Instruments :

Touche « *Y=* » et saisir comme expliqué plus haut :

Capture d’écran 2014-07-29 à 21

Afficher la table : Touches « *2nd*» et « *GRAPH* » :



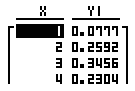
Avec Casio :

Dans « *MENU*», choisir « *TABLE* » ;

Saisir comme expliqué plus haut :

Capture d’écran 2014-07-29 à 21

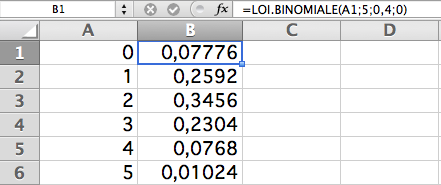
Afficher la table : Touche « *TABL*» :



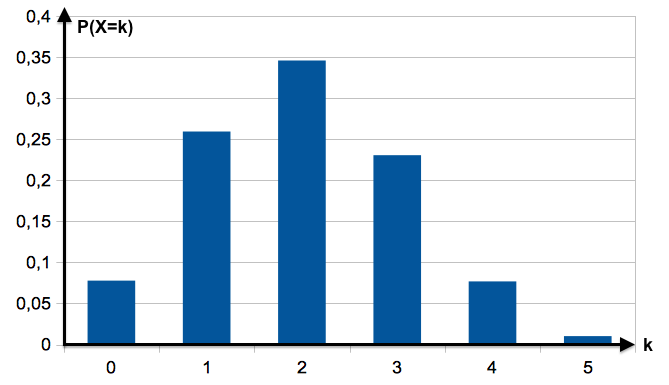
Avec le tableur :

Saisir dans la cellule B1 : =LOI.BINOMIALE(A1;5;0,4;0)

Et copier cette formule vers le bas.



On représente ensuite la loi binomiale par un diagramme en bâtons :



6) Espérance de la loi binomiale

Exemple :

On lance 5 fois un dé à six faces.

On considère comme succès le fait d'obtenir 5 ou 6.

On considère la variable aléatoire donnant le nombre de succès.

On a donc : et = 5.

Propriété : Soit la variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre et .

On a : =

Ainsi :

=

On peut espérer obtenir environ 1,7 fois un 5 ou un 6, en 5 lancers.

Méthode : Calculer l’espérance d’une loi binomiale

 **Vidéo** [**https://youtu.be/95t19fznDOU**](https://youtu.be/95t19fznDOU)

Un QCM comporte 8 questions. A chaque question, trois solutions sont proposées ; une seule est exacte.

Chaque bonne réponse rapporte 0,5 point.

On répond au hasard à chaque question. Quelle note peut-on espérer obtenir ?

**Correction**

Soit la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses.

suit une loi binomiale de paramètre et = .

On peut espérer obtenir bonnes réponses en répondant au hasard.

On peut donc espérer obtenir point en répondant au hasard.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)