LIMITES DES FONCTIONS – Chapitre 2/2

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/YPwJyYDsmxM**](https://youtu.be/YPwJyYDsmxM)

**Partie 1 : Limite d'une fonction composée**

Méthode : Déterminer la limite d'une fonction composée

 **Vidéo** [**https://youtu.be/DNU1M3Ii76k**](https://youtu.be/DNU1M3Ii76k)

Soit la fonction définie sur par :

Calculer la limite de la fonction en .

**Correction**

On a : , donc

Donc, comme limite d’une fonction composée :

En effet, si , on a : et donc : .

**Partie 2 : Limites et comparaisons**

1. Théorèmes de comparaison

Théorèmes : Soit et deux fonctions définies sur un intervalle .

- Si pour tout de , on a : alors (Fig.1)

- Si pour tout de , on a alors (Fig.2)

Remarque : On obtient des théorèmes analogues en .

 

Figure 1

Par abus de langage, on pourrait dire que la fonction pousse la fonction vers pour des valeurs de suffisamment grandes.

Figure 2

Démonstration dans le cas de la figure 1 :

 donc tout intervalle , réel, contient toutes les valeurs de dès que est suffisamment grand, soit : .

Or, dès que est suffisamment grand, on a .

Donc dès que est suffisamment grand, on a : .

Et donc .

 2) Théorème d'encadrement

Théorème des gendarmes :

Soit , et trois fonctions définies sur un intervalle .

Si pour tout de , on a : alors .

Remarque : On obtient un théorème analogue en .



Par abus de langage, on pourrait dire que les fonctions et (les gendarmes) se resserrent autour de la fonction pour des valeurs de suffisamment grandes pour la faire tendre vers la même limite.

Ce théorème est également appelé le **théorème du sandwich**.

Méthode : Utiliser les théorèmes de comparaison et d'encadrement

 **Vidéo** [**https://youtu.be/OAtkpYMdu7Y**](https://youtu.be/OAtkpYMdu7Y)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Eo1jvPphja0**](https://youtu.be/Eo1jvPphja0)

Calculer : 1) 2)

**Correction**

1) • n'existe pas.

Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :

•

Donc : .

• donc d'après le théorème de comparaison :

2) • n'existe pas.

Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :

•

Donc : , car

Et donc :

 donc .

Et donc : , comme limite d’un quotient.

On a donc :

D'après le théorème des gendarmes, on a : .

**Partie 3 : Cas de la fonction exponentielle**

1. Limites aux bornes

Propriétés :

 et

Démonstration au programme :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/DDqgEz1Id2s**](https://youtu.be/DDqgEz1Id2s)

- La suite est une suite géométrique de raison .

Donc, on a : .

Si on prend un réel quelconque (aussi grand que l’on veut), il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite dépassent , soit : .

La fonction exponentielle étant strictement croissante, on a également, pour tout

: .

Donc, pour tout , on a : .

Ainsi, tout intervalle contient toutes les valeurs de , dès que est suffisamment grand.

Soit : .

-, en posant

Or, , donc : , comme limite d’un quotient.

Soit : .

Méthode : Déterminer la limite d'une fonction contenant des exponentiels

 **Vidéo** [**https://youtu.be/f5i\_u8XVMfc**](https://youtu.be/f5i_u8XVMfc)

Calculer les limites suivantes :

a) b)

**Correction**

a)

* Donc, comme limite d’une fonction composée :

En effet, si , on a : et donc : .

* Comme limite d’une somme : .

b) , donc :

Donc, comme limite d’une fonction composée : .

1. Croissance comparée des fonctions exponentielles et puissances

Exemple :

Observons la fonction exponentielle et la fonction puissance dans différentes fenêtres graphiques.

Dans cette première fenêtre, la fonction puissance semble l’emporter devant la fonction exponentielle.



Mais on constate que pour suffisamment grand, la fonction exponentielle dépasse la fonction puissance .



Remarque : Dans le cas de limites infinies, la fonction exponentielle impose sa limite devant les fonctions puissances. Sa croissance est plus rapide.

Propriétés (croissances comparées) :

a) et pour tout entier ,

b) et pour tout entier ,

Démonstration au programme du a :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/\_re6fVWD4b0**](https://youtu.be/_re6fVWD4b0)

- On pose .

On a :

On calcule la dérivée de la dérivée

.

Et on note

Pour tout strictement positif, .

On dresse alors le tableau de variations :



On en déduit que pour tout strictement positif, et donc .

Soit encore : .

Comme , on en déduit par comparaison de limites que .

- Dans le cas général, on a :

Or : car on a vu que .

Donc : , car est positif.

Et donc , comme produit de limites infinies.

Soit :

Méthode : Calculer une limite par croissance comparée

 **Vidéo** [**https://youtu.be/GoLYLTZFaz0**](https://youtu.be/GoLYLTZFaz0)

Calculer la limite suivante :

**Correction**

● Le dénominateur comprend une forme indéterminée de type "".

Levons l'indétermination :

● Par croissance comparée : et de même : .

Donc, comme inverse de limites : ,

donc .

● Donc, et donc .

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)