ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/pMQBaCqLPsQ**](https://youtu.be/pMQBaCqLPsQ)

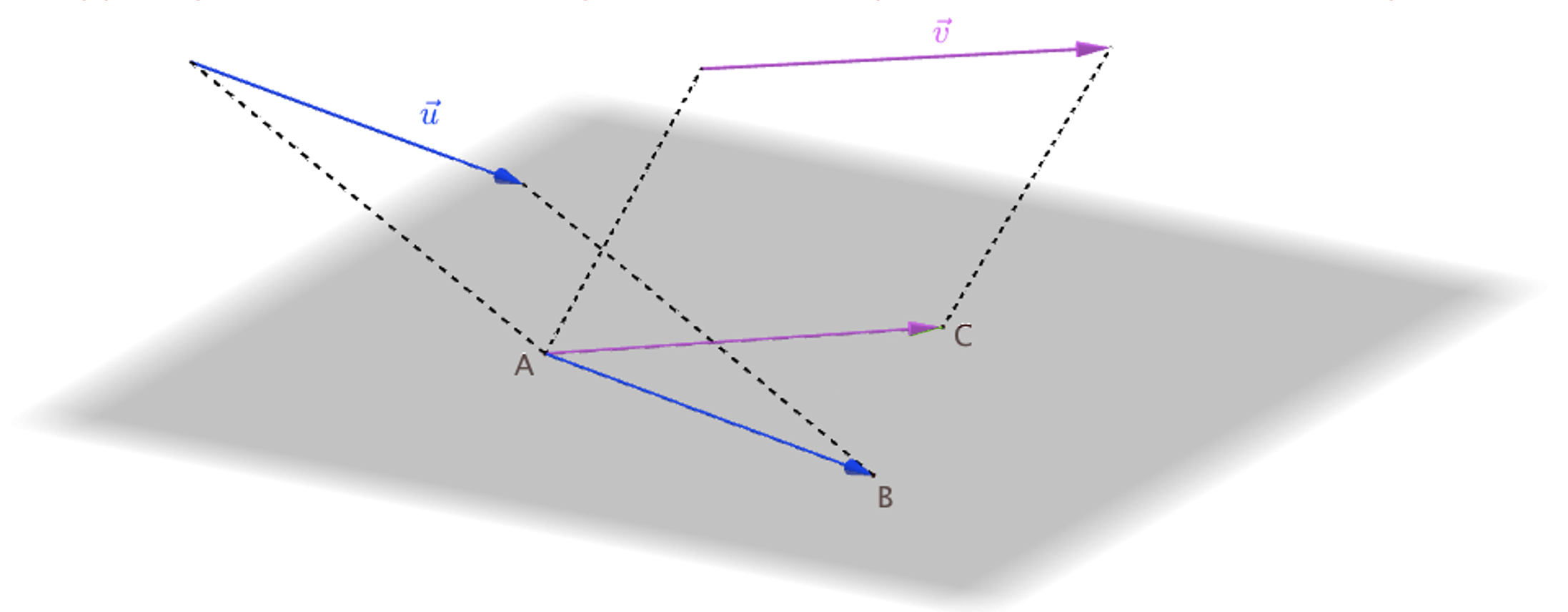
**Partie 1 : Produit scalaire de deux vecteurs de l’espace**

1) Définition et propriétés

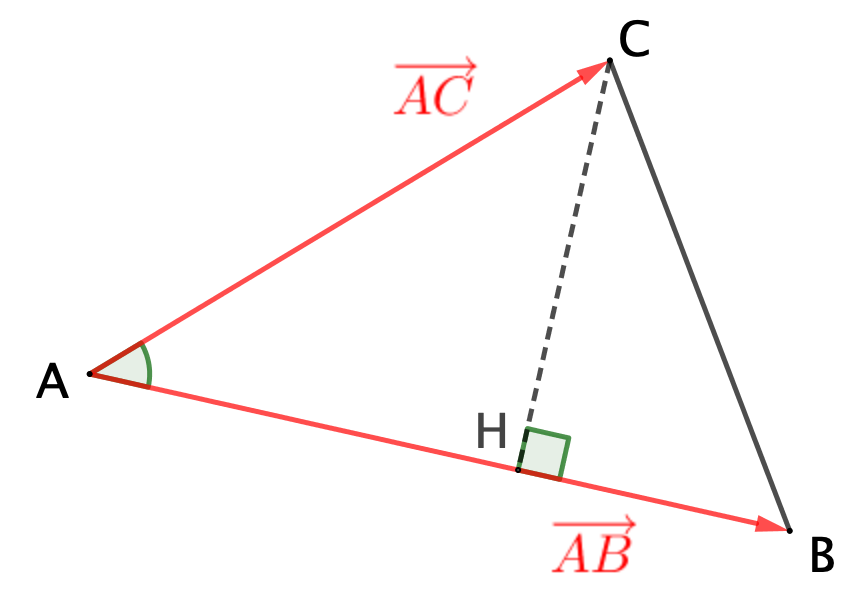
Définition : Soit et deux vecteurs de l'espace. , et trois points tels que et

. Il existe un plan contenant les points , et .

On appelle **produit scalaire de l'espace** de et le produit dans le plan .



**On retrouve alors dans l’espace toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan :**

Propriétés permettant de calculer un produit scalaire :

● .

●

● est le projeté orthogonal du point sur la

droite (). On a :

●

Propriétés algébriques :

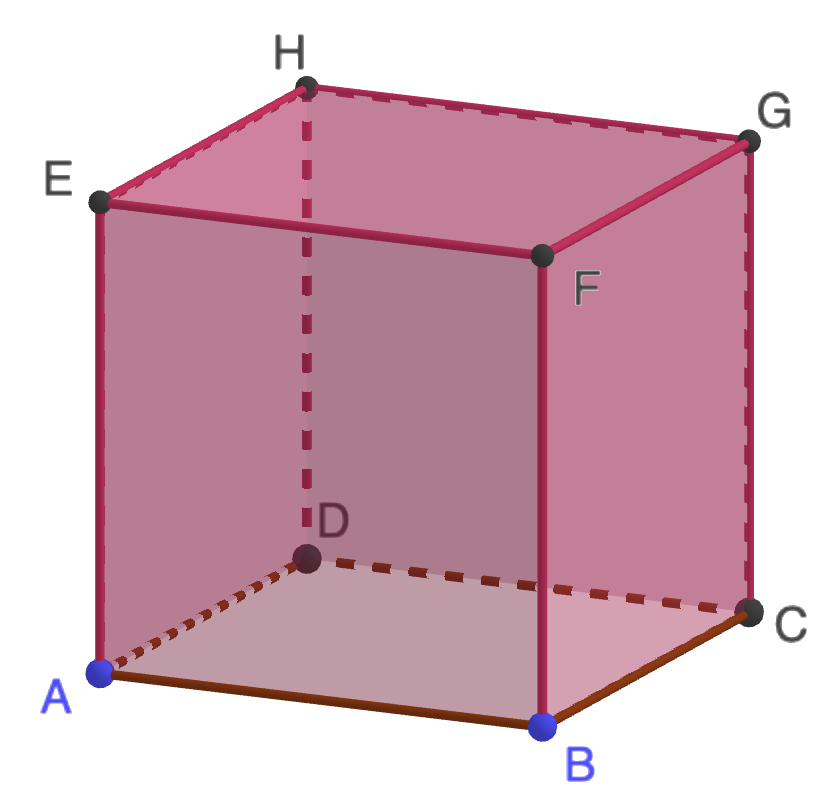
● **Symétrie** :

● **Bilinéarité** : et , avec

● **Identités remarquables** :

⟶ On peut également noter :

● **Formule de polarisation** :

Propriété d’orthogonalité :

et sont orthogonaux

Méthode : Calculer le produit scalaire dans l’espace

 **Vidéo** [**https://youtu.be/vp3ICG3rRQk**](https://youtu.be/vp3ICG3rRQk)

est un cube d'arête .

Calculer les produits scalaires :

a) b) c)

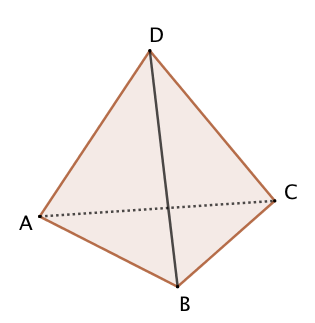
**Correction**

a)

, étant le projeté orthogonal de sur ().

b) car et sont orthogonaux.

c)

Méthode : Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8Obh6cIZeEw**](https://youtu.be/8Obh6cIZeEw)

Soit un tétraèdre régulier d’arêtes de longueur .

Démontrer que les arêtes [] et [] sont orthogonales.

**Correction**

On va prouver que .

Dans le triangle équilatéral ABD, on a :

On démontre de même dans le triangle équilatéral que :

Ainsi :

Les vecteurs et sont donc orthogonaux, et donc

Les arêtes [] et [] sont orthogonales.

2) Produit scalaire dans un repère orthonormé

Définitions :

● Une base de l’espace est **orthonormée** si :

- les vecteurs et sont deux à deux orthogonaux,

- les vecteurs et sont unitaires, soit :, et

● Un repère de l’espace est **orthonormé,** si sa base est orthonormée**.**

Propriétés : Dans un repère orthonormé de l’espace  :

● Soit et deux vecteurs de l'espace.

et .

● Soit et deux points de l’espace.

Démonstration :

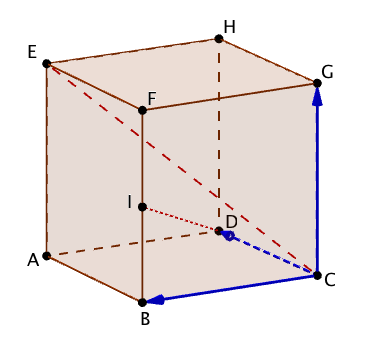
●

En effet, on a par exemple dans le plan définit par le couple :

, et

● On a, en particulier : .

● Et :



Méthode : Calculer un produit scalaire à l’aide des coordonnées

 **Vidéo** [**https://youtu.be/N1IA15sKH-E**](https://youtu.be/N1IA15sKH-E)

On considère le repère de l'espace .

I est le milieu du segment [].

Les vecteurs et sont-ils orthogonaux ?

**Correction**

On a : et soit .

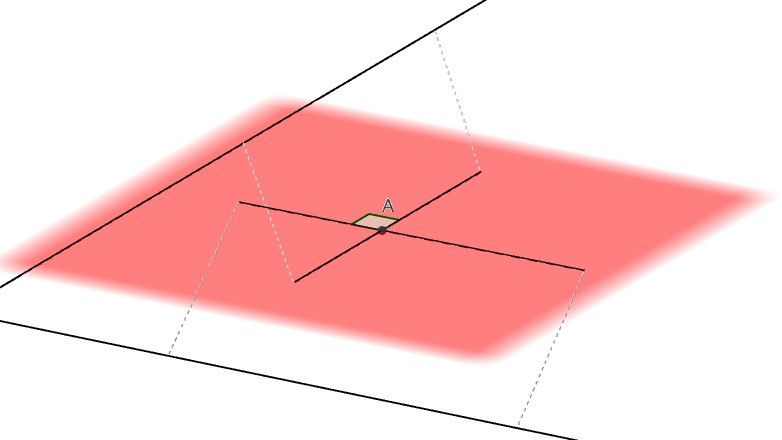
Alors : .

Les vecteurs et ne sont pas orthogonaux.

**Partie 2 : Orthogonalité**

1) Orthogonalité de deux droites

Définition : Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires.





Exemple :

est un cube.

- Les droites () et () sont perpendiculaires.

- Les droites () et () sont orthogonales.

Remarques :

- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.

- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque n'est pas vraie car deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires et sécantes.

2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Propriété : Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de .

Une image contenant ligne, diagramme, conception, origami

Description générée automatiquement

Propriété : Si une droite est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale à toutes les droites de .

Démonstration :

Soit une droite de vecteur directeur orthogonale à deux droites sécanteset de . Soit et des vecteurs directeurs respectifs de et .

Alors et sont non colinéaires et orthogonaux au vecteur .

Soit une droite quelconque de de vecteur directeur.

Démontrons que est orthogonale à .

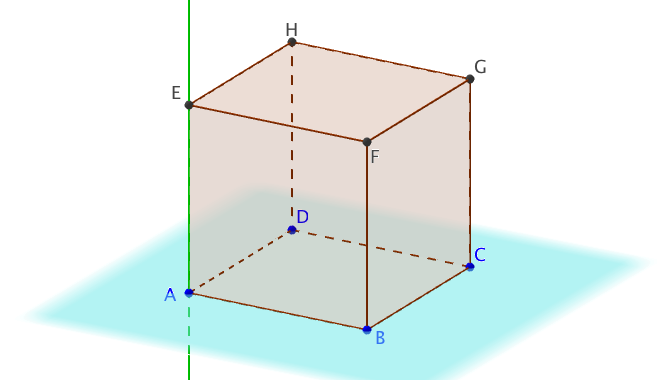
peut se décomposer en fonction de et qui constituent une base de (car non colinéaires).

Il existe donc deux réels et tels que .

Donc , car est orthogonal avec et

Donc est orthogonal au vecteur .

Et donc est orthogonale à .



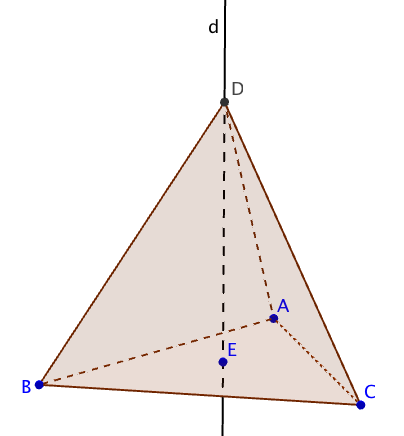
Exemple :

est un cube.

() est perpendiculaire aux droites () et ().

() et () sont sécantes et définissent le plan ().

Donc () est orthogonal au plan ().



Méthode : Démontrer que des droites sont orthogonales

 **Vidéo** [**https://youtu.be/qKWghhaQJUs**](https://youtu.be/qKWghhaQJUs)

est un triangle équilatéral. est le point d'intersection de ses hauteurs.

La droite passant par est orthogonale au plan ().

La pyramide est telle que soit un point de la droite .

Démontrer que les droites () et () sont orthogonales.

**Correction**

La droite est orthogonale au plan ().

La droite est donc orthogonale à toutes les droites du plan ().

Comme la droite () appartient au plan (), la droite est orthogonale à la droite ().

Par ailleurs, la droite () est perpendiculaire à la droite ().

Ainsi, () est orthogonale à deux droites sécantes du plan () : () et .

Donc () est orthogonale au plan ().

Et donc la droite () est orthogonale à toutes les droites du plan ().

La droite () appartient au plan () donc la droite () est orthogonale à la droite ().

**Partie 3 : Vecteur normal à un plan**

1) Définition et propriétés

Définition : Un vecteur non nul de l'espace est **normal** à un plan si est un vecteur directeur d’une droite orthogonale au plan .

Une image contenant capture d’écran, conception

Description générée automatiquement

Propriété : Un vecteur non nul de l'espace est normal à un plan *,* s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction de .

Une image contenant ligne, diagramme, conception

Description générée automatiquement

Propriété : Soit un point et un vecteur non nul de l’espace.

L’ensemble des points tels que  est le plan passant par et de vecteur normal .

Une image contenant conception

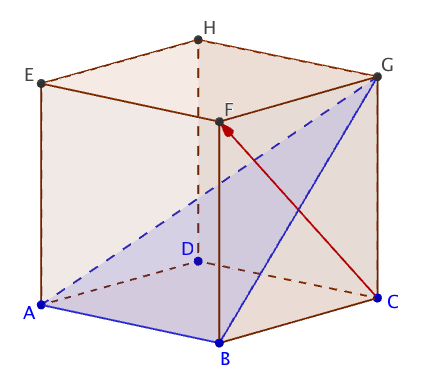
Description générée automatiquement



Au XIXe siècle, le vecteur normal , appelé produit vectoriel, est noté ⋀.

Le produit vectoriel a été inventé par un mathématicien allemand, *Hermann Günther Grassmann* (1809 ; 1877).

Méthode : Déterminer si un vecteur est normal à un plan

 **Vidéo** [**https://youtu.be/aAnz\_cP72Q4**](https://youtu.be/aAnz_cP72Q4)

est un cube.

Démontrer que le vecteur est normal au plan ().

**Correction**

On considère le repère orthonormé .

Dans ce repère : ,,,,.

On a ainsi :

, et , donc :

Donc est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (), il est donc normal à ().

Méthode : Déterminer un vecteur normal à un plan

 **Vidéo** [**https://youtu.be/IDBEI6thBPU**](https://youtu.be/IDBEI6thBPU)

Dans un repère orthonormé, on donne : , et .

Déterminer un vecteur normal au plan ().

**Correction**

On a : et .

Soit un vecteur orthogonal au plan (). Il est tel que :

soit

Prenons par exemple, (arbitrairement choisi) alors et .

Le vecteur est donc normal au plan ().

Remarque :

La solution n’est pas unique. Tout vecteur colinéaire à est solution.

2) Projections orthogonales

Définitions :

● Soit un point et une droite de l’espace.

Le **projeté orthogonal du point sur la droite**  est le point appartenant à tel que la droite () soit perpendiculaire à la droite .

Une image contenant ligne, antenne

Description générée automatiquement

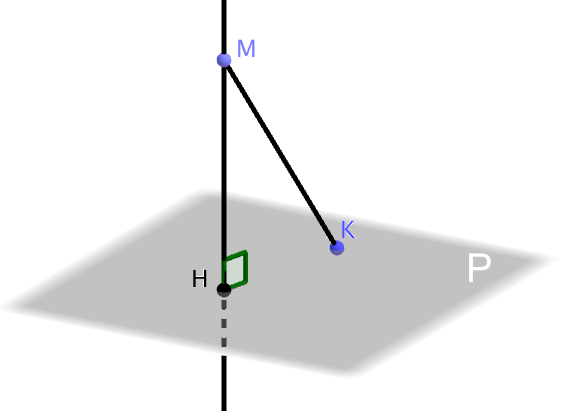
● Soit un point et un plan de l’espace.

Le **projeté orthogonal du point sur le plan**  est le point appartenant à tel que la droite () soit orthogonale au plan .

Une image contenant capture d’écran, ligne, diagramme, conception

Description générée automatiquement

Propriété : Le projeté orthogonal d’un point sur un plan est le point de le plus proche de .

Démonstration au programme :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/c7mxA0TbVFU**](https://youtu.be/c7mxA0TbVFU)

Soit le projeté orthogonal du point sur le

plan *P*.

Supposons qu’il existe un point du plan *P* plus

proche de que l’est le point .

car est le point de la droite le plus

proche de .

Donc .

Or, () est orthogonale à *P*, donc () est orthogonale à toute droite de *P*.

En particulier, () est perpendiculaire à ().

Le triangle est donc rectangle en .

D’après l’égalité de Pythagore, on a :

Donc .

Donc . Ce qui est impossible sauf dans le cas où le point est le point .

On en déduit que est le point du plan le plus proche du point .

Méthode : Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d’un point à un plan

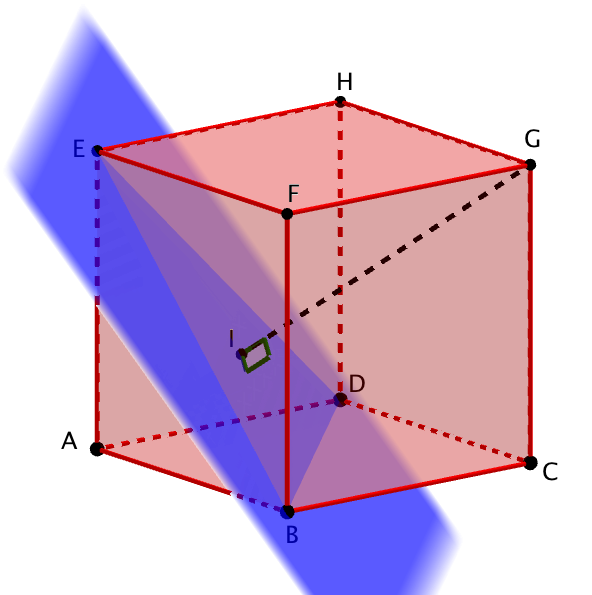
 **Vidéo** [**https://youtu.be/1b9FtX4sCmQ**](https://youtu.be/1b9FtX4sCmQ)

Soit un cube . On considère le repère orthonormé .

a) Calculer les coordonnées du projeté orthogonal du point sur le plan ().

b) En déduire la distance du point au plan (.

**Correction**

a) On cherche à déterminer les coordonnées du point . Dans le repère orthonormé , on a :

On a alors : , , ,

Or, () est orthogonale au plan donc le vecteur est orthogonal aux vecteurs et . Soit :

On a ainsi :

De plus, est orthogonal au vecteur , soit :

car

Donc car sinon et sont confondus, ce qui est impossible.

Soit :

On en déduit les coordonnées de  : .

b) Et ainsi :



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)