PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/5oBnmZVrOXE**](https://youtu.be/5oBnmZVrOXE)

**Partie 1 : Probabilités conditionnelles et tableaux**

Définition :

On appelle **probabilité conditionnelle de** $B$ **sachant** $A$, la probabilité que l'événement $B$ se réalise sachant que l'événement $A$ est réalisé. On la note : $P\_{A}\left(B\right).$

Remarque : On rappelle que, comme pour les probabilités simples, on a :

$$0\leq P\_{A}\left(B\right)\leq 1$$

Méthode : Calculer une probabilité conditionnelle à l’aide d’un tableau

 **Vidéo** [**https://youtu.be/7tS60nk6Z2I**](https://youtu.be/7tS60nk6Z2I)

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints d’une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d’autres avec le médicament B. Le tableau présente les résultats de l’étude :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Médicament A | Médicament B | Total |
| Guéri | 383 | 291 | 674 |
| Non guéri | 72 | 54 | 126 |
| Total | 455 | 345 | 800 |

1) On choisit au hasard un patient et on considère les évènements suivants :

$A$ : « Le patient a pris le médicament A. »

$G$ : « Le patient est guéri. »

Calculer : a) $P\left(A\right)$ b) $P\left(G\right)$ c) $P\left(G∩A\right)$ d) $P\left(\overbar{G}∩A\right)$

2) a) On choisit maintenant au hasard un patient guéri.

Calculer la probabilité que le patient ait pris le médicament A **sachant qu**’il est guéri.

 b) On choisit maintenant au hasard un patient traité par le médicament B.

Calculer la probabilité que le patient soit guéri **sachant qu**’il a pris le médicament B.

**Correction**

1) a) La probabilité qu’un patient soit traité avec le médicament A est égale à :$ $

$$P\left(A\right)=\frac{455}{800}≈0,57=57 \%.$$

 b) La probabilité qu’un patient soit guéri est égale à : $P\left(G\right)=$ $\frac{674}{800}$ $≈0,84=84 \%$.

 c) La probabilité qu’un patient soit guéri et qu’il soit traité par le médicament A est égale à $ P\left(G∩A\right)=$ $\frac{383}{800}$ $≈0,48=48 \%$.

 d) La probabilité qu’un patient ne soit pas guéri et qu’il soit traité par le médicament A est égale à : $P\left(\overbar{G}∩A\right)=$ $\frac{72}{800}$ $≈0,09=9 \%$.

2) a)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Médicament A | Médicament B | Total |
| Guéri | 383 | 291 | 674 |
| Non guéri | 72 | 54 | 126 |
| Total | 455 | 345 | 800 |

La probabilité que le patient ait pris le médicament A **sachant qu**’il est guéri se note $P\_{G}\left(A\right)$ et est égale à $P\_{G}\left(A\right)=$ $\frac{383}{674}$ $≈0,57=57 \%$. On regarde uniquement la ligne des patients guéris.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Médicament A | Médicament B | Total |
| Guéri | 383 | 291 | 674 |
| Non guéri | 72 | 54 | 126 |
| Total | 455 | 345 | 800 |

 b)

La probabilité que le patient soit guéri **sachant qu**’il a pris le médicament B se note $P\_{\overbar{A}}\left(G\right)$ et est égale à $P\_{\overbar{A}}\left(G\right)=$ $\frac{291}{345}$ $≈0,84=84 \%$. On regarde uniquement la colonne du médicament B.

Propriété : $P\_{A}\left(B\right)=$ $\frac{P\left(A∩B\right)}{P\left(A\right)}$

Méthode : Calculer une probabilité conditionnelle à l’aide de la formule

 **Vidéo** [**https://youtu.be/SWmkdKxXf\_I**](https://youtu.be/SWmkdKxXf_I)

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soit $A$ l'événement : « Le résultat est un pique ».

Soit $B$ l'événement : « Le résultat est un roi ».

Calculer $P\_{A}\left(B\right)$, la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique.

**Correction**

$P\left(A\right)=$ $\frac{8}{32}$ = $\frac{1}{4}$ et $P\left(A∩B\right)=$ $\frac{1}{32}$.

Donc la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique est :

$P\_{A}\left(B\right)=$ $\frac{P\left(A∩B\right)}{P\left(A\right)}$ $=$ $\frac{1}{32} :\frac{1}{4}$ $=$ $\frac{1}{8}$.

Remarque : On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, parmi les piques, on a 1 chance sur 8 d'obtenir le roi.

**Partie 2 : Arbre pondéré et probabilités totales**

1. Propriétés

Formules : Soit $A$ et $B$ deux événements avec $P\left(A\right)\ne 0$.

- $P\_{A}\left(\overbar{B}\right)=1-P\_{A}\left(B\right)$

- $P\left(A∩B\right)=P\left(A\right)×P\_{A}\left(B\right)$

1. Construire un arbre pondéré

Exemple :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Pc5kJBkPDbo**](https://youtu.be/Pc5kJBkPDbo)

On donne : $P(A)=0,4$, $P\_{A}(B)=0,3$ et $P\_{\overbar{A}}(B)=0,2$

● On reporte ces probabilités dans l’arbre :

Au 2e niveau de l’arbre, on note les probabilités conditionnelles.



● On complète les probabilités manquantes :



On utilise la formule : $P\_{A}\left(\overbar{B}\right)=1-P\_{A}\left(B\right)$

$$1-0,3$$

$$1-0,4$$

$$1-0,2$$

● On calcule les probabilités d’intersections :

On utilise la formule :

 $P\left(A∩B\right)=P\left(A\right)×P\_{A}\left(B\right)$



Méthode : Construire un arbre pondéré

 **Vidéo** [**https://youtu.be/o1HQ6xJ7o4U**](https://youtu.be/o1HQ6xJ7o4U)

On donne l’arbre pondéré ci-contre.

a) Traduire les données de l’arbre sous forme de probabilités.

b) À l’aide de l’arbre, calculer $P\left(A\right), $ $P\_{\overbar{A}}(\overbar{B})$ et $P(A∩\overbar{B})$.

**Correction**

a) $P\left(\overbar{A}\right)=0,6$, $P\_{A}\left(\overbar{B}\right)=0,7$ et $P\_{\overbar{A}}\left(B\right)=0,2$.

b) ● $P\left(A\right)=1-P\left(\overbar{A}\right)=1-0,6=0,4$

● $P\_{\overbar{A}}\left(\overbar{B}\right)=1-P\_{\overbar{A}}\left(B\right)=1-0,2=0,8$

● $P\left(A∩\overbar{B}\right)=P\left(A\right)×P\_{A}\left(\overbar{B}\right)$

$$ =0,4×0,7=0,28$$

3) Formule des probabilités totales

Propriété :

 

Méthode : Appliquer la formule des probabilités totales

 **Vidéo** [**https://youtu.be/qTpTBoZA7zY**](https://youtu.be/qTpTBoZA7zY)

Lors d’une épidémie chez des bovins, on s’est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d’animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

– si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;

– si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d’utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note respectivement $M$ et $T$ les événements « Être porteur de la maladie » et

« Avoir un test positif ».

a) Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?

b) Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu’il soit malade ?

*D'après BAC S, Antilles-Guyanne 2010*

**Correction**

a) On construit et on complète un arbre pondéré :



D’après la formule des probabilités totales :

$P\left(T\right)=P\left(M∩T\right)+P\left(\overbar{M}∩T\right)$

 $ =0,02×0,85+0,98×0,05=0,066$.

La probabilité que le test soit positif est égale à $6,6 \%$.

b) $P\_{T}\left(M\right)=$ $\frac{P\left(T∩M\right)}{P\left(T\right)}$ = $\frac{0,02×0,85}{0,066}$ $≈$ $0,26$.

La probabilité que le bovin soit malade sachant que le test est positif est d’environ $26 \%$.

**Partie 3 : Probabilités et indépendance**

Définition : On dit que deux évènements $A$ et $B$ de probabilité non nulle sont **indépendants** lorsque $P\_{A}\left(B\right)=P\left(B\right)$ ou $P\_{B}\left(A\right)=P\left(A\right)$.

Exemples :

a) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soit $R$ l'événement : « On tire un roi ».

Soit $T$ l'événement : « On tire un trèfle ».

On a : $P\left(R\right) $= $\frac{4}{32}$ = $\frac{1}{8}$.

Par ailleurs, $P\_{T}\left(R\right)$ est la probabilité de tirer un roi parmi les trèfles. On a alors :

$$P\_{T}\left(R\right)=\frac{1}{8}$$

Ainsi, $P\_{T}\left(R\right)=P\left(R\right)$.

Les événements $R$ et $T$ sont donc indépendants.

b) On reprend l'expérience précédente en ajoutant deux jokers au jeu de cartes.

Ainsi :

$P\left(R\right) $= $\frac{4}{34}$ = $\frac{2}{17}$.

$$P\_{T}\left(R\right)=\frac{1}{8}$$

Ainsi, $P\_{T}\left(R\right)\ne P\left(R\right)$.

Les événements $R$ et $T$ ne sont donc pas indépendants.

Méthode : Utiliser l'indépendance de deux événements

 **Vidéo** [**https://youtu.be/fcmwzbnz2F4**](https://youtu.be/fcmwzbnz2F4)

Dans une population, un individu est atteint par la maladie $a$ avec une probabilité égale à 0,005 et par la maladie $b$ avec une probabilité égale à 0,01.

On choisit au hasard un individu de cette population.

Soit $A$ l'événement "L'individu a la maladie $a$".

Soit $B$ l'événement "L'individu a la maladie $b$".

On suppose que les événements $A$ et $B$ sont indépendants.

a) Calculer la probabilité qu’un individu soit atteint par les deux maladies.

b) Calculer $P\left(A∪B\right)$. Interpréter le résultat.

**Correction**

a) La probabilité qu’un individu soit atteint par les deux maladies est $P\left(A∩B\right)$.

Or, d’après la formule de probabilité conditionnelle, on a :

$P\_{B}\left(A\right)=$ $\frac{P\left(A∩B\right)}{P\left(B\right)}$

Soit : $P\left(A∩B\right)=P\_{B}\left(A\right)×P\left(B\right)$

$ =P\left(A\right)×P\left(B\right)$, car $A$ et $B$ sont indépendants.

$$ =0,005×0,01$$

$$ =0,00005$$

La probabilité qu’un individu soit atteint par les deux maladies est égale à $0,00005$.



b) On a : $P\left(A∪B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A∩B\right)$

 $= 0,005 + 0,01 – 0,00005$

 $= 0,01495$

La probabilité qu'un individu choisi au hasard ait au moins une des deux maladies est égale à $1,495 \%$.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)