

ÉQUATIONS

▶ Tout le cours sur les équations en vidéo : <https://youtu.be/WoTpA2RyuVU>

Partie 1 : Équations du premier degré

But : Trouver x !

C'est-à-dire : isoler x dans l'équation pour arriver à :
 $x = \text{nombre}$

Méthode : Résoudre une équation du premier degré

▶ Vidéo <https://youtu.be/quzC5C3a9jM>

Résoudre les équations : a) $-5x + 3 = -3x + 2$
 b) $3(x + 4) = -(x + 5) + 2$

Correction

$$1) -5x + 3 = -3x + 2$$

$$-5x + 3x = 2 - 3$$

$$-2x = -1$$

$$x = \frac{-1}{-2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

← On ramène les « x » à gauche et les « nombres » à droite.

← Réduire

← On divise par -2 .

$$2) 3(x + 4) = -(x + 5) + 2$$

$$3x + 12 = -x - 5 + 2$$

$$3x + x = -12 - 5 + 2$$

$$4x = -15$$

$$x = -\frac{15}{4}$$

On applique la distributivité

Partie 2 : Équation-produit

▶ Équation du type : $P(x) \times Q(x) = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions littérales.

Propriété : Si $A \times B = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$.

Autre formulation :

Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Méthode : Résoudre une équation-produit

▶ Vidéo <https://youtu.be/EFgwA5f6-40>

▶ Vidéo <https://youtu.be/sMvrUMUES3s>

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $(4x + 6)(3 - 7x) = 0$

b) $(3x + 1)(1 - 6x) - (3x + 7)(3x + 1) = 0$

c) $5x^2 - 4x = 0$

Correction

a) $(4x + 6)(3 - 7x) = 0$

Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Soit : $4x + 6 = 0$ ou $3 - 7x = 0$

$$4x = -6 \qquad -7x = -3$$

$$x = -\frac{6}{4} \qquad x = \frac{-3}{-7}$$

$$x = -\frac{3}{2} \qquad x = \frac{3}{7}$$

L'équation a deux solutions : $-\frac{3}{2}$ et $\frac{3}{7}$.

On note : $S = \left\{ -\frac{3}{2} ; \frac{3}{7} \right\}$.

b) On commence par factoriser l'expression pour se ramener à une équation-produit :

$$(3x + 1)(1 - 6x) - (3x + 7)(3x + 1) = 0$$

$$(3x + 1)[(1 - 6x) - (3x + 7)] = 0$$

$$(3x + 1)(1 - 6x - 3x - 7) = 0$$

$$(3x + 1)(-9x - 6) = 0$$

Soit : $3x + 1 = 0$ ou $-9x - 6 = 0$

$$3x = -1 \qquad -9x = 6$$

$$x = -\frac{1}{3} \qquad x = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}$$

L'équation a deux solutions : $-\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$.

On note : $S = \left\{ -\frac{2}{3} ; -\frac{1}{3} \right\}$.

c) $5x^2 - 4x = 0$

$$x(5x - 4) = 0$$

Soit : $x = 0$ ou $5x - 4 = 0$

$$5x = 4$$

$$x = \frac{4}{5}$$

L'équation a deux solutions : 0 et $\frac{4}{5}$.

On note : $S = \left\{0 ; \frac{4}{5}\right\}$.

Partie 3 : Équation de la forme $x^2 = a$

Propriété : Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $x^2 = a$ dépendent du signe de a .

Si $a < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.

Si $a = 0$, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.

Si $a > 0$, alors l'équation possède deux solutions qui sont $-\sqrt{a}$ et \sqrt{a} .

Démonstration :

- Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution car un carré est toujours positif.
- Si $a = 0$, alors l'équation s'écrit $x^2 = 0$ donc $x = 0$.
- Si $a > 0$: $x^2 = a$ équivaut à : $x^2 - a = 0$, soit encore : $x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$

$$\text{Soit } (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$$

$$x - \sqrt{a} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{a} = 0$$

L'équation possède deux solutions : $-\sqrt{a}$ et \sqrt{a} .

Méthode : Résoudre une équation de la forme $x^2 = a$

 Vidéo <https://youtu.be/ef15aeQRs6w>

Résoudre dans \mathbb{R} les équations :

a) $x^2 = 16$ b) $x^2 = -8$ c) $(x + 2)^2 = 9$.

Correction

a) L'équation $x^2 = 16$ possède deux solutions : $x = -\sqrt{16} = -4$ et $x = \sqrt{16} = 4$.
On note : $S = \{-4 ; 4\}$.

b) L'équation $x^2 = -8$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} car -8 est négatif.
On note : $S = \emptyset$.

c) L'équation $(x + 2)^2 = 9$ possède deux solutions :

$$x + 2 = -\sqrt{9} \quad \text{et} \quad x + 2 = \sqrt{9}$$

$$\text{Soit : } x = -3 - 2 = -5 \quad \text{et} \quad x = 3 - 2 = 1$$

L'équation a deux solutions : -5 et 1 . On note : $S = \{-5 ; 1\}$.

Partie 4 : Équation-quotient

- Équation du type : $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions littérales ($Q(x) \neq 0$).

Propriété : Si $\frac{A}{B} = 0$ alors $A = 0$ et $B \neq 0$.

Exemple :

L'équation $\frac{x+2}{x+3} = 0$ a pour solution $x = -2$.

Méthode : Résoudre une équation-quotient

► Vidéo <https://youtu.be/zhY1HD4oLHg>

► Vidéo <https://youtu.be/OtGN4HHwEek>

Résoudre dans \mathbb{R} les équations :

a) $\frac{3x+5}{x-1} = 0$ b) $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4} = 0$ c) $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$ d) $\frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{x-3}$
 e) Pour les experts : $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$

Correction

a) L'équation $\frac{3x+5}{x-1} = 0$ n'est pas définie pour $x - 1 = 0$, soit pour $x = 1$.

Pour $x \neq 1$, l'équation $\frac{3x+5}{x-1} = 0$ équivaut à : $3x + 5 = 0$

$$\begin{aligned} 3x &= -5 \\ x &= -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

On note : $S = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$.

b) L'équation $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4} = 0$ n'est pas définie pour $x - 4 = 0$, soit pour $x = 4$.

Pour $x \neq 4$, l'équation $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4} = 0$ équivaut à : $(2x + 1)(x - 3) = 0$

Soit : $2x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$

$$2x = -1 \quad x = 3$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Les solutions sont : $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 3$.

On note : $S = \left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}$.

c) L'équation $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$ n'est pas définie pour $x+3=0$, soit pour $x = -3$.

Pour $x \neq -3$, l'équation $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$ équivaut à : $x^2 - 9 = 0$, soit $x^2 = 9$

Soit encore : $x = -\sqrt{9} = -3$ ou $x = \sqrt{9} = 3$.

Comme $x \neq -3$, l'équation a pour unique solution : $x = 3$.

On note : $S = \{3\}$.

d) L'équation $\frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{x-3}$ n'est pas définie pour : $x-3=0$, soit pour $x = 3$.

Pour $x \neq 3$, l'équation $\frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{x-3}$ équivaut à : $\frac{x+3}{x-3} - \frac{2}{x-3} = 0$.

On réduit au même dénominateur dans le but de se ramener à une équation-quotient :

$$\frac{x+3-2}{x-3} = 0$$

$$\frac{x+1}{x-3} = 0$$

Pour $x \neq 3$, l'équation équivaut à $x+1=0$.

D'où $x = -1$.

On note : $S = \{-1\}$.

e) L'équation $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$ n'est pas définie pour $x=2$ et $x=3$.

Pour $x \neq 2$ et $x \neq 3$, l'équation $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$ équivaut à : $1 - \frac{x+3}{x-3} - \frac{2}{2-x} = 0$

On réduit au même dénominateur dans le but de se ramener à une équation-quotient :

$$\frac{(x-3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{(x+3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{2(x-3)}{(2-x)(x-3)} = 0$$

$$\frac{(x-3)(2-x) - (x+3)(2-x) - 2(x-3)}{(x-3)(2-x)} = 0$$

On développe et on réduit le numérateur :

$$\frac{2x - x^2 - 6 + 3x - 2x + x^2 - 6 + 3x - 2x + 6}{(x-3)(2-x)} = 0$$

$$\frac{4x-6}{(x-3)(2-x)} = 0$$

Ce qui équivaut à $4x - 6 = 0$.

D'où $x = \frac{3}{2}$.

On note : $S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales