# DROITES DU PLAN

  **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/d-rUnClmcCY**](https://youtu.be/d-rUnClmcCY)

**Partie 1 : Vecteur directeur et équation cartésienne d’une droite**

1. Vecteur directeur

Définition : *d*
$d$ est une droite du plan.

On appelle **vecteur directeur** de $d$ tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui

possède la même direction que la droite $d$*.*

Méthode : Déterminer graphiquement un vecteur directeur d’une droite



 **Vidéo** [**https://youtu.be/6VdSz-0QT4Y**](https://youtu.be/6VdSz-0QT4Y)

Donner des vecteurs directeurs des

droites d1, d2, d3 et d4.

**Correction**

* Pour d1 :

On choisit un vecteur qui possède la même direction que la droite d1.

Par exemple : $\vec{a}\left(\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right)$ convient.

$\vec{b}\left(\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right)$ ou $\vec{c}\left(\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}\right)$ sont également des vecteurs directeurs de d1.

* Pour d2 : $\vec{u}\left(\begin{matrix}6\\0\end{matrix}\right)$ convient.
* Pour d3 : $\vec{v}\left(\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right)$ convient.
* Pour d4 : $\vec{w}\left(\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right)$ convient.
1. Équation cartésienne d'une droite

Définition :

Toute droite admet une équation de la forme $ax+by+c=0$, avec $\left(a ;b\right)\ne \left(0 ;0\right)$.

Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite.

Propriété : Le vecteur $\vec{u}\left(\begin{matrix}-b\\a\end{matrix}\right)$ est un vecteur directeur de la droite d’équation cartésienne

$ax+by+c=0$.

**Démonstration au programme :**

 **Vidéo** [**https://youtu.be/GVDUrdsRUdA**](https://youtu.be/GVDUrdsRUdA)

Soit $A\left(\begin{matrix}x\_{0}\\y\_{0}\end{matrix}\right)$ un point de la droite $d$ et $\vec{u}\left(\begin{matrix}α\\β\end{matrix}\right)$ un vecteur directeur de $d$.

Un point $M\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)$ appartient à la droite $d$ si et seulement si les vecteurs $\vec{AM}\left(\begin{matrix}x-x\_{0}\\y-y\_{0}\end{matrix}\right)$ et $\vec{u}\left(\begin{matrix}α\\β\end{matrix}\right)$ sont colinéaires, soit $det\left(\vec{AM} ;\vec{u}\right)=0$ soit encore $\left|\begin{matrix}x-x\_{0}&α\\y-y\_{0}&β\end{matrix}\right|=0$.

Donc : $β\left(x-x\_{0}\right)-α\left(y-y\_{0}\right)=0$

$ βx-βx\_{0}-αy+αy\_{0}=0$

$ βx-αy+αy\_{0}-βx\_{0}=0$

Cette équation peut s'écrire : $ax+by+c=0$ avec $a=β$ et $b=-α$ et $c=αy\_{0}-βx\_{0}$.

Les coordonnées de $\vec{u}$ sont donc $\left(\begin{matrix}α\\β\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}-b\\a\end{matrix}\right)$.

Exemple : Un vecteur directeur de la droite d’équation cartésienne $4x-5y-1=0$ est le vecteur de coordonnées $\left(\begin{matrix}5\\4\end{matrix}\right)$.

En effet, $a=4$ et $b=-5$ donc $\left(\begin{matrix}-b\\a\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}5\\4\end{matrix}\right)$.

Méthode : Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur

 **Vidéo** [**https://youtu.be/NosYmlLLFB4**](https://youtu.be/NosYmlLLFB4)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/i5WD8IZdEqk**](https://youtu.be/i5WD8IZdEqk)

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite $d$ passant par le point $A\left(\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\begin{matrix}-1\\5\end{matrix}\right)$.

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite $d'$ passant par les points $B\left(\begin{matrix}5\\3\end{matrix}\right)$ et $C\left(\begin{matrix}1\\-3\end{matrix}\right)$.

**Correction**

a) $d$ admet une équation cartésienne de la de la forme $ax+by+c=0$.

* Comme $\vec{u}$ $\left(\begin{matrix}-1\\5\end{matrix}\right)$ est un vecteur directeur de $d$, on a : $\left(\begin{matrix}-1\\5\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}-b\\a\end{matrix}\right)$

Soit $a=5$ et $b=1$.

Une équation de $d$ est donc de la forme $5x+1y+c=0$.

* Pour déterminer $c$, il suffit de substituer les coordonnées $\left(\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right)$ de $A$ dans l'équation :

$$5×3+1×1+c=0$$

$$15+1+c=0$$

$$16+c=0$$

$$c=-16$$

Une équation de $d$ est donc $5x+1y-16=0$.

Remarque : Une autre méthode consiste à utiliser le déterminant :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/rLxQIbQkPsQ**](https://youtu.be/rLxQIbQkPsQ)

b) ● $B$ et $C$ appartiennent à $d’$ donc $\vec{BC}$ est un vecteur directeur de $d'$.

On a : $\vec{BC}\left(\begin{matrix}1-5\\-3-3\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}-4\\-6\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}-b\\a\end{matrix}\right)$. Donc $a=-6$ et $b=4$.

Une équation cartésienne de $d'$ est de la forme : $-6x+4y+c=0$.

* $B\left(\begin{matrix}5\\3\end{matrix}\right)$ appartient à $d'$ donc : $-6×5+4×3+c=0$ donc $c=18$.

Une équation cartésienne de $d'$ est : $-6x+4y+18=0$ ou encore $-3x+2y+9=0$.

# Méthode : Tracer une droite à partir de l'équation cartésienne

 **Vidéo** [**https://youtu.be/EchUv2cGtzo**](https://youtu.be/EchUv2cGtzo)

Tracer la droite $d$ d’équation cartésienne $3x+2y-5=0.$

**Correction**

Pour tracer une droite, il suffit de connaître un point appartenant à la droite et un vecteur directeur.



* On choisit le point d’abscisse $0$ :

Comme $x=0$, on remplace $x $par $0$ dans l’équation et on calcule la valeur de $y$ correspondante :

$$3×0+2y-5=0$$

$$2y=5$$

$$y=\frac{5}{2}=2,5$$

Le point $A $de coordonnées $\left(\begin{matrix}0\\2,5\end{matrix}\right)$ appartient à la droite $d.$

* $a=3$ et $b=2$ donc $\left(\begin{matrix}-b\\a\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right)$.

$\vec{u}$ $\left(\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right)$ est un vecteur directeur de $d$.

On trace la droite $d$ passant par le point $A\left(\begin{matrix}0\\2,5\end{matrix}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ $\left(\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right)$.

1. Position relative de deux droites

Propriété :

Dire que deux droitessont parallèles équivaut à dire qu’elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Méthode : Déterminer la position relative des deux droites

 **Vidéo** [**https://youtu.be/NjsVdVolhvU**](https://youtu.be/NjsVdVolhvU)

Démontrer que les droites $d\_{1}$et $d\_{2}$ d’équations respectives $6x-10y-5=0$ et

$-9x+15y=0$sont parallèles.

**Correction**

Le vecteur $\vec{u}\left(\begin{matrix}10\\6\end{matrix}\right)$ est un vecteur directeur de la droite $d\_{1}$.

Le vecteur $\vec{v}\left(\begin{matrix}-15\\-9\end{matrix}\right)$ est un vecteur directeur de la droite $d\_{2}$.

Calculons $det\left(\vec{u} ;\vec{v}\right)$ :

$$det\left(\vec{u} ;\vec{v}\right)=\left|\begin{matrix}10&-15\\6&-9\end{matrix}\right|=10×\left(-9\right)-6×\left(-15\right)=0$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et donc les droites $d\_{1}$et $d\_{2}$ sont parallèles.

**Partie 2 : Équation réduite et pente d'une droite**

1. Équation réduite

Exemple : Soit $d$ dont une droite d'**équation cartésienne** $4x+y-6=0$.

On a alors : $4x+y=6$

 $y=-4x+6$

Cette équation est appelée l’**équation réduite** de la droite $d$.

Propriété :

Soit une droite $d$.

- Si $d$ est parallèle à l’axe des ordonnées :

alors l’équation de $d$ est de la forme $x=n$.

- Si $d$ n’est pas parallèle à l’axe des ordonnées :

alors l’équation de $d$est de la forme $y=mx+p$.

Cette équation est appelée **équation réduite** de la

droite $d$.

Démonstration :

* Si $b\ne 0$, alors l'équation cartésienne $ax+by+c=0$ de la droite $d$ peut être ramenée à une équation réduite $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$. Et on note $m=-\frac{a}{b}$ et $p=-\frac{c}{b}$.
* Si $b=0$, alors l'équation cartésienne $ax+by+c=0$ de la droite $d$ peut être ramenée à l’équation $x=-$ $\frac{c}{a}$ . Dans ce cas, la droite $d$ est parallèle à l’axe des ordonnées.

Exemples :

* L’équation $y=-4x+6$ est l’équation réduite d’une droite avec :

$m=-4$ et $p=6.$

* L’équation $x=5$ est l’équation d’une droite parallèle à l’axe des ordonnées avec :

$$n=5.$$

Méthode : Passer d’une équation cartésienne à l’équation réduite et réciproquement

 **Vidéo** [**https://youtu.be/XA0YajthETQ**](https://youtu.be/XA0YajthETQ)

a) Soit la droite $d$ d’équation cartésienne $6x+3y-5=0$. Déterminer l’équation réduite de $d$.

b) Soit la droite $d’$ d’équation réduite $y=6x-5$. Déterminer une équation catésienne de $d'$.

**Correction**

a) On veut exprimer l’équation sous la forme $y=ax+b.$ Il s’agit donc d’isoler $y$ dans l’équation.

$$6x+3y-5=0$$

$$3y=-6x+5$$

$$y=\frac{-6x+5}{3}$$

$y=-2x+$ $\frac{5}{3}$ : équation réduite de $d$.

b) On veut exprimer l’équation sous la forme $ax+by+c=0.$ Il s’agit donc de ramener tous les termes de l’équation dans le membre de gauche.

$$y=6x-5$$

$-6x+y+5=0$ : équation cartésienne de $d’$.

Vocabulaire : - $m$ est appelé la **pente** ou le **coefficient directeur** de la droite $d$.

 - $p$ est appelé l’**ordonnée à l’origine** de la droite $d$.

Remarque : Dans l’équation réduite, on retrouve l’expression d’une fonction affine.

Exercice :

Donner la pente (coefficient directeur) et l’ordonnée à l’origine de chacune des droites d’équations : a) $y=-2x+3$ b) $y=5$ c) $4x+2y=1$

**Réponses**

a) Pente : $-2$ b) Pente : $0$

 Ordonnée à l’origine : $3$ Ordonnée à l’origine : $5$

c) L’équation peut s’écrire sous sa forme réduite : $y=-2x+$ $\frac{1}{2}$

 Pente : $-2$

Ordonnée à l’origine : $\frac{1}{2}$

Méthode : Représenter graphiquement une droite d’équation réduite donnée

 **Vidéo** [**https://youtu.be/cUdhxkaTqqk**](https://youtu.be/cUdhxkaTqqk)

Dans un repère, tracer les droites $d\_{1}$ *,* $d\_{2}$et $d\_{3}$ d’équations respectives :

$y=2x+3$, $y=4$, $x=3$*.*

**Correction**

● - La droite $d\_{1}$ d’équation $y=2x+3 $a pour ordonnée à l’origine 3. Donc le point de coordonnée $\left(\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right)$ appartient à la droite $d\_{1}$*.*

**- On choisit le point d’abscisse $2$ :

Comme $x=2$, on remplace $x $par $2$ dans l’équation et on calcule la valeur de $y$ correspondante :

$y=2×2+ 3=7$.

Le point de coordonnées $\left(\begin{matrix}2\\7\end{matrix}\right)$ appartient à *d1.*

On peut ainsi tracer la droite $d\_{1}$passant par ces deux points.

● La droite $d\_{2}$ d’équation $y=4$ est l’ensemble des points dont l’ordonnée est égale à $4$. La droite $d\_{2}$ est donc la droite parallèle à l’axe des abscisses passant par le point de coordonnées $\left(\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right)$.

● La droite $d\_{3} $d’équation $x=3$ est l’ensemble des points dont l’abscisse est égale à $3$. La droite $d\_{3}$ est donc la droite parallèle à l’axe des ordonnées passant par le point de coordonnées $\left(\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right)$.

Méthode : Vérifier si un point appartient à une droite d’équation donnée

 **Vidéo** [**https://youtu.be/XA0YajthETQ**](https://youtu.be/XA0YajthETQ)

Les points $A\left(\begin{matrix}6\\39\end{matrix}\right)$ et $B\left(\begin{matrix}346\\2420\end{matrix}\right)$ appartiennent-ils à la droite $d$ d’équation $y=7x-3$ ?

**Correction**

* + Dire que le point $A\left(\begin{matrix}6\\39\end{matrix}\right)$ appartient à la droite $d$ d’équation $y=7x-3$ revient à dire que les coordonnées de $A$ vérifient l’équation de la droite $d$.

Ce qui est le cas, puisque $y=7×6-3=39$.

Le point $A$ appartient donc à la droite $d$.

* + Les coordonnées de $B\left(\begin{matrix}346\\2420\end{matrix}\right)$ ne vérifient pas l’équation de la droite $d$.

En effet : $7×346-3=2419\ne 2420$ donc le point $B$ n’appartient pas à la droite $d$.

Remarque : Pour démontrer que 3 points A, B et C sont alignés, il suffit de montrer par exemple que le point A vérifie l’équation de la droite (BC).

1. Pente d’une droite

Propriété : Si $A\left(\begin{matrix}x\_{A}\\y\_{A}\end{matrix}\right)$ et $B\left(\begin{matrix}x\_{B}\\y\_{B}\end{matrix}\right)$ sont deux points distincts d’une droite tel que $x\_{A}\ne x\_{B}$ alors la droite a pour pente (ou coefficient directeur) $m=$ $\frac{y\_{B}-y\_{A}}{x\_{B}-x\_{A}}$.

Méthode : Déterminer une équation réduite de droite dont on connaît deux points

 **Vidéo** [**https://youtu.be/tfagLy6QRuw**](https://youtu.be/tfagLy6QRuw)

Soit $A\left(\begin{matrix}4\\-1\end{matrix}\right)$ et $B\left(\begin{matrix}3\\5\end{matrix}\right)$ deux points d’une droite $d$. Déterminer une équation de la droite $d$.

**Correction**

L’équation réduite de la droite $d$ est de la forme $y=mx+p$.

* La pente (coefficient directeur) de $d$ est : $m=$ $\frac{y\_{B}-y\_{A}}{x\_{B}-x\_{A}}=\frac{5-\left(-1\right)}{3-4}=\frac{6}{-1}$ $=-6$.

L’équation de $d$ est donc de la forme : $y=-6x+p$.

* Comme $A\left(\begin{matrix}4\\-1\end{matrix}\right)$ appartient à la droite *d*, ses coordonnées vérifient l’équation de $d$.

Soit : $-1=-6×4+p$.

D’où $p=-1+6×4=23$.

L’équation réduite de $d$ est donc $: y=-6x+23$*.*

**ALGORITHME**

TP avec Python : Déterminer une équation de droite passant par deux points donnés

****[*https://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo\_EqDroite.pdf*](https://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo_EqDroite.pdf)

1. Position relative de deux droites

Propriété : Soient deux droites d’équations réduites $y=mx+p $et $y=m'x+p'.$

Dire que les droites sont parallèles revient à dire que leurs pentes sont égales ($m=m'$).

Remarque : Lorsque les pentes sont différentes, les droites sont sécantes.

Exemple : Les droites$d\_{1}$et $d\_{2}$ d’équations respectives $y=3x+4 $et $y=3x+9$ sont parallèles car elles ont la même pente égale à $3$.

Méthode : Déterminer la position relative de deux droites

 **Vidéo** [**https://youtu.be/gTUPGw7Bulc**](https://youtu.be/gTUPGw7Bulc)

Dans chaque cas, déterminer la position relative des deux droites :

a) $d\_{1}:y=-2x-5$ et $d\_{2}:y=-2x+4$

b) $d\_{3}:y=2x+1 $ et $ d\_{4}:y=-3x+8$

c) $d\_{5}:y=-x+7$ et $ d\_{6}:y=3$

d) $d\_{7}:x=1$ et $d\_{8}:x=-8$

**Correction**

1) Les droites$d\_{1}$et $d\_{2}$ sont parallèles car elles ont la même pente égale à $-2$.

2) Les droites$d\_{3}$et $d\_{4}$ sont sécantes car elles ont des pentes différentes $2$ et $-3$.

3) Les droites$d\_{5}$et $d\_{6}$ sont sécantes car elles ont des pentes différentes $-1$ et $0$.

4) Les droites$d\_{7}$et $d\_{8}$ sont parallèles car elles sont parallèles à l’axe des ordonnées.

**Partie 3 : Projeté orthogonal d’un point sur une droite**

Définition : Soit une droite $d$ et un point $M$.

Le **projeté orthogonal** du point $M$ sur la droite $d$ est le point

d'intersection $H$ de la droite $d$ avec la perpendiculaire à $d$

passant par $M$.

Propriété : Le projeté orthogonal du point $M$ sur la droite $d$ est le point de la droite $d$ le plus proche du point $M$.

**Démonstration au programme :**

 **Vidéo** [**https://youtu.be/DohZ0ehR\_rw**](https://youtu.be/DohZ0ehR_rw)

Soit $H$ le projeté orthogonal du point $M$ sur la droite $d$.

Supposons qu’il existe un point $K$ de la droite $d$ plus proche de $M$ que l’est le point $H$.



$KM\leq HM$ car $K$ est le point de la droite le plus proche de $M$.

Donc $KM^{2}\leq HM^{2}$.

Or, d’après l’égalité de Pythagore, on a : $HM^{2}+HK^{2}=KM^{2}$

Donc $HM^{2}+HK^{2}\leq HM^{2}$.

Donc $HK^{2}\leq 0$. Ce qui est impossible sauf dans le cas où le point $K$ est le point $H$.

On en déduit que $H$ est le point de la droite $d$ le plus proche du point $M$.

Méthode : Reconnaitre et construire un projeté orthogonal



 **Vidéo** [**https://youtu.be/MiJHpVzyQPc**](https://youtu.be/MiJHpVzyQPc)

1) Donner le projeté orthogonal de :

 a) C sur (AB) b) B sur (DF)

 c) D sur (AC) d) F sur (AD)

2) Représenter sur la figure le projeté

orthogonal de :

 a) C sur (BF). Nommer ce point M.

 b) F sur (AB). Nommer ce point N.

**Correction**

1) a) Il s’agit du point B. En effet, la perpendiculaire à (AB) passant par C coupe (AB) en B.

 b) Il s’agit du point C.

 c) Il s’agit du point E.

 d) Il s’agit du point D.

2)

**Démonstration au programme :** $\left(\cos(α)\right)^{2}+\left(\sin(α)\right)^{2}=1$



 **Vidéo** [**https://youtu.be/9r2qDd7EkMo**](https://youtu.be/9r2qDd7EkMo)

Soit une droite $d$ et un point $P$ appartenant à $d$.

Soit un point $M$ n’appartenant pas à $d$.

On appelle $H$ le projeté orthogonal du point $M$

sur la droite $d$.

On note $α$ l’angle $\hat{MPH}$.

Démontrons que $\left(\cos(α)\right)^{2}+\left(\sin(α)\right)^{2}=1$.

Le triangle $PHM$ est rectangle en $H$, on a donc : $\cos(α)=$ $\frac{PH}{PM}$ soit $PH=PM×\cos(α)$.

De même, on a : $\sin(α)=$ $\frac{HM}{PM}$ soit $HM=PM×\sin(α)$.

D’après le théorème de Pythagore, on a : $PH^{2}+HM^{2}=PM^{2}$

Soit en remplaçant : $\left(PM×\cos(α)\right)^{2}+\left(PM×\sin(α)\right)^{2}=PM^{2}$

Soit encore : $PM^{2}×\left(\cos(α)\right)^{2}+PM^{2}×\left(\sin(α)\right)^{2}=PM^{2}$

Soit enfin, en simplifiant : $\left(\cos(α)\right)^{2}+\left(\sin(α)\right)^{2}=1$.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)