DÉRIVATION – Chapitre 3/3

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/uMSNllPBFhQ**](https://youtu.be/uMSNllPBFhQ)

**Partie 1 : Étude des variations d'une fonction**

1) Variations et signe de la dérivée

Théorème : Soit une fonction définie et dérivable sur un intervalle .

- Si , alors est décroissante sur .

- Si , alors est croissante sur .

Remarques : - Si , alors est **constante** sur .

- Si , alors est **strictement** croissante sur .

Méthode : Comprendre le lien entre signe de la dérivée et variations de la fonction

 **Vidéo** [**https://youtu.be/dPIlTNyBCiw**](https://youtu.be/dPIlTNyBCiw)

a) Soit la fonction définie sur , tel que

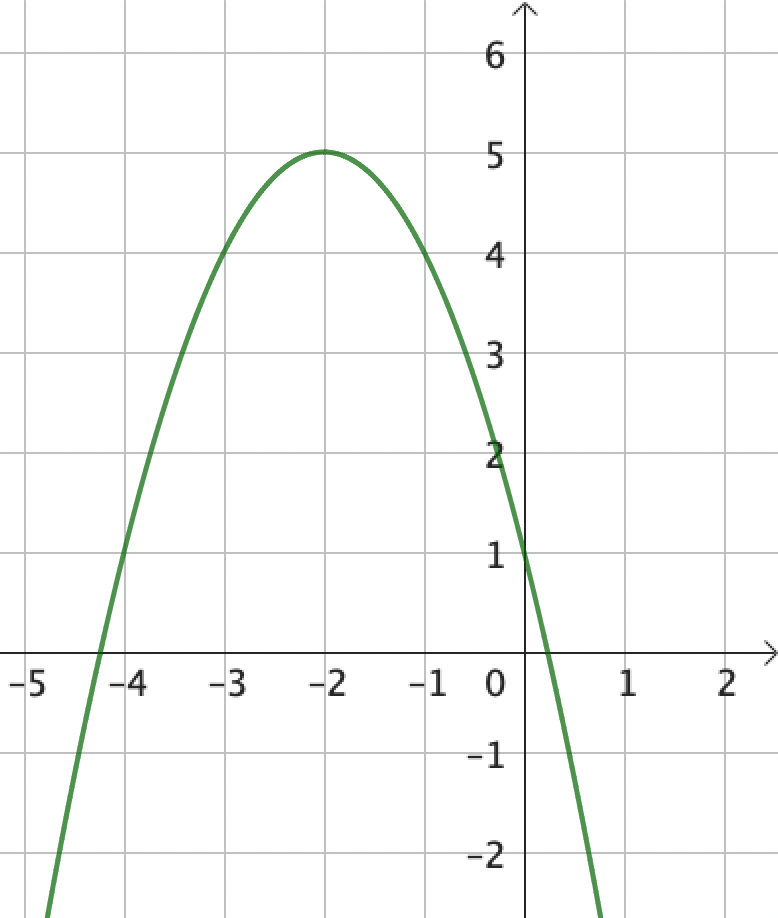
On donne le signe de la dérivée, compléter le tableau de variations.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | |
|  | – |  |
|  |  | |

b) Soit la fonction définie sur , tel que

On donne les variations de la fonction , compléter le tableau avec le signe de la dérivée.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 4 | |
|  |  |  |
|  |  | |



c) On donne la représentation graphique de la fonction

compléter le tableau de variations.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | |
|  |  |  |
|  |  | |

**Correction**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | |
|  | – |  |
|  |  | |

a)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | |
|  |  |  |
|  |  | |

b)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | |
|  |  |  |
|  |  | |

c)

2) Étude des variations d’une fonction du second degré

Méthode : Étudier les variations d’une fonction polynôme du second degré

 **Vidéo** [**https://youtu.be/EXTobPZzORo**](https://youtu.be/EXTobPZzORo)

Soit la fonction définie sur par .

a) Calculer la fonction dérivée de .

b) Déterminer le signe de en fonction de .

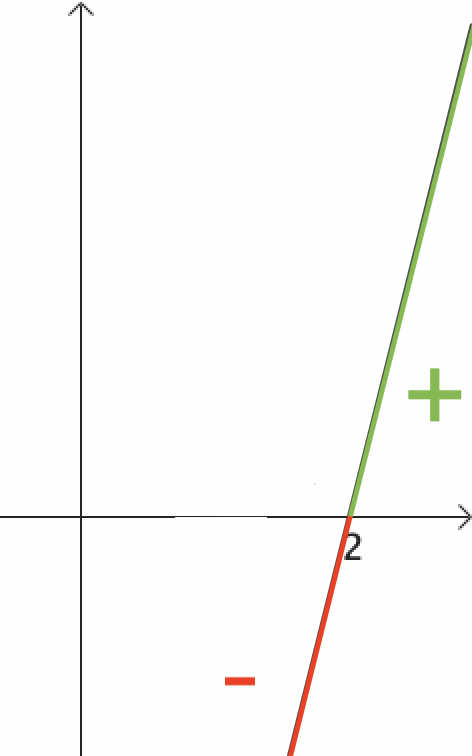
c) Dresser le tableau de variations de .

**Correction**

a) .

b) Étude du signe de la dérivée :

On commence par résoudre l’équation .

Soit :

.

La fonction est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 4 est positif.

Donc est croissante. Elle est donc d’abord négative (avant ) puis positive (après ).

c) On dresse le tableau de variations en appliquant le théorème :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | |
|  | – |  |
|  |  | |

.

2) Étude des variations d’une fonction du 3e degré

Méthode : Étudier les variations d’une fonction polynôme du 3e degré

 **Vidéo** [**https://youtu.be/23\_Ba3N0fu4**](https://youtu.be/23_Ba3N0fu4)

Soit la fonction définie sur par .

a) Calculer la fonction dérivée de .

b) Déterminer le signe de en fonction de .

c) Dresser le tableau de variations de .

**Correction**

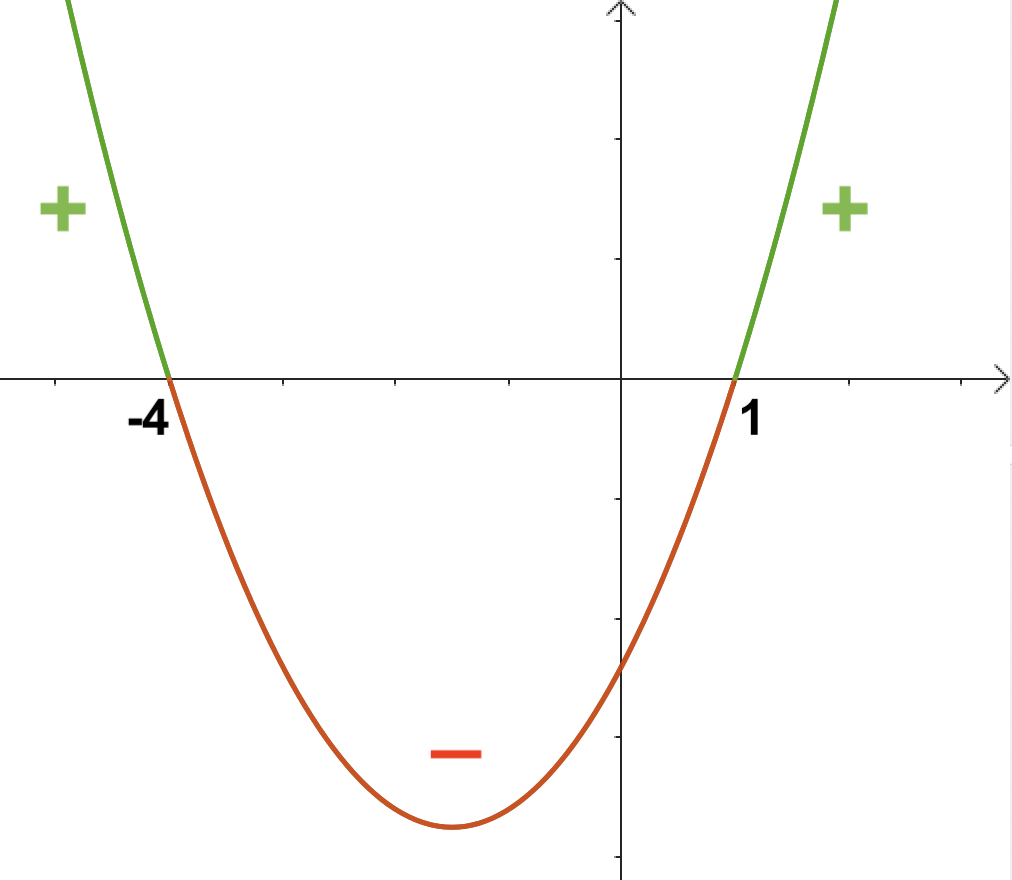
a) .

b) Étude du signe de la dérivée :

On commence par résoudre l'équation :

Le discriminant du trinôme est égal à

L'équation possède deux solutions : = et =



Comme , les branches de la parabole représentant la fonction dérivée sont tournées vers le haut (position « 😊 »).

La dérivée est donc d’abord positive, puis négative, puis positive.

c) On dresse le tableau de variations en appliquant le théorème :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | | |
|  |  |  |  |
|  | – | | |

3) Étude des variations d’une fonction rationnelle

Méthode : Étudier les variations d’une fonction rationnelle

 **Vidéo** [**https://youtu.be/5NrV-TXme\_8**](https://youtu.be/5NrV-TXme_8)

Soit la fonction définie sur par

a) Calculer la fonction dérivée de .

b) Déterminer le signe de en fonction de .

c) Dresser le tableau de variations de .

**Correction**

avec

Donc :

b) Étude du signe de la dérivée :

est un carré donc toujours positif.

Donc .

c) On dresse alors le tableau de variations :

Une image contenant texte, antenne

Description générée automatiquement

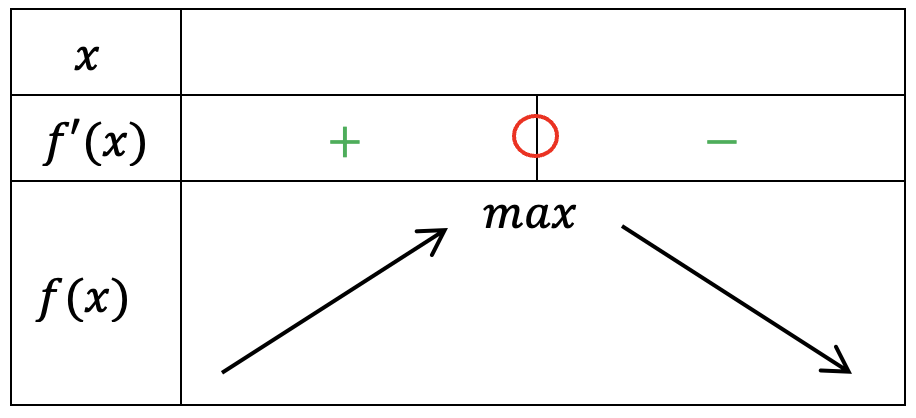
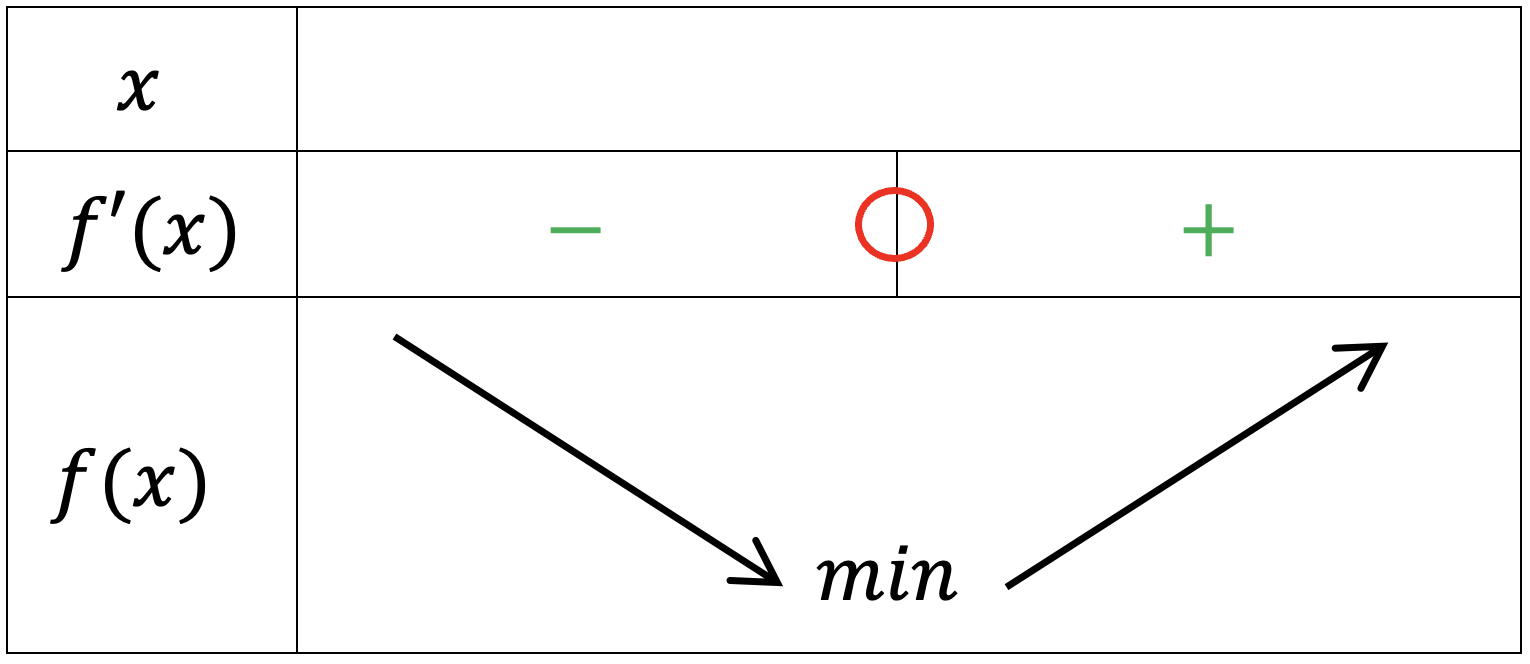
La double-barre dans le tableau

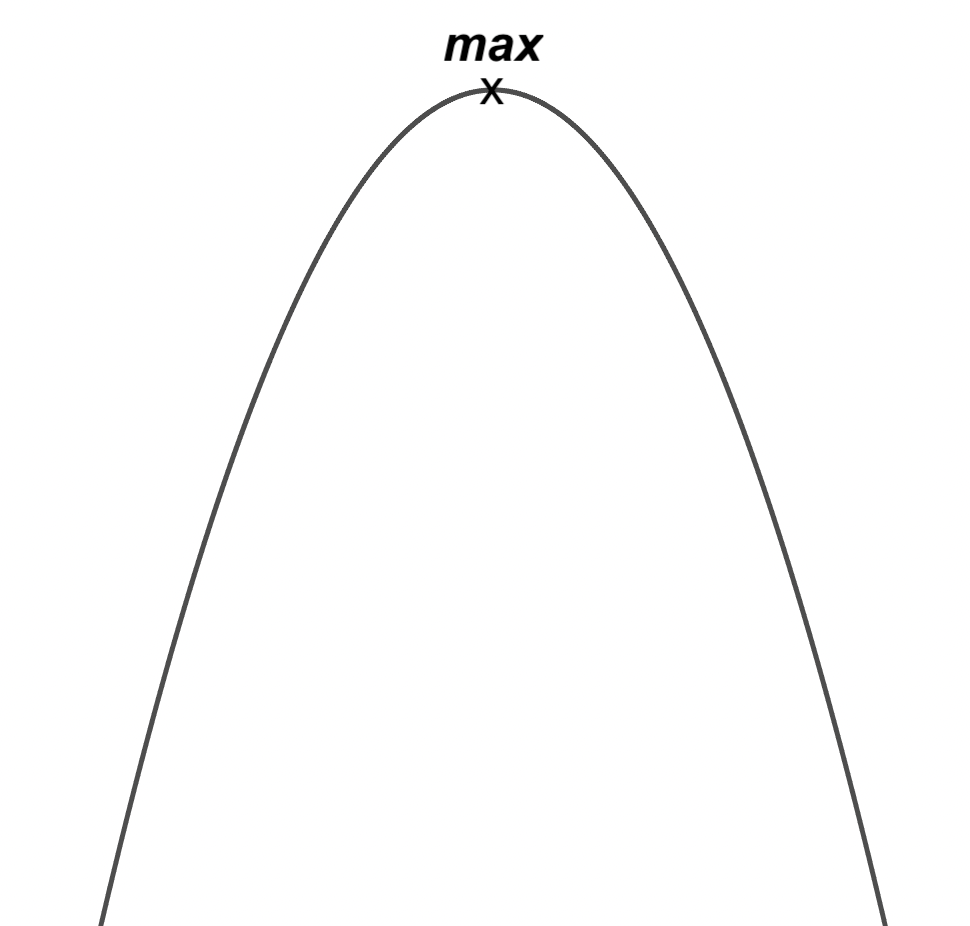
signifie que la fonction n’est pas

définie pour .

**Partie 2 : Extremum d'une fonction**

|  |  |
| --- | --- |
| La fonction admet un **maximum** au point  où la dérivée s’annule et change de signe. | La fonction admet un **minimum** au point où la dérivée s’annule et change de signe. |



Une image contenant sport, ligne

Description générée automatiquement

Théorème : Soit une fonction dérivable sur un intervalle ouvert .

Si la dérivée s'annule et change de signe en un réel alors admet un extremum en

.

Méthode : Déterminer un extremum d’une fonction

 **Vidéo** [**https://youtu.be/zxyKLqnlMIk**](https://youtu.be/zxyKLqnlMIk)

Soit la fonction définie sur par .

a) Calculer la fonction dérivée de .

b) Déterminer le signe de en fonction de .

c) Dresser le tableau de variations de .

d) En déduire que la fonction admet un extremum sur . On précisera la valeur où il est atteint.

e) Déterminer l’équation de la tangente à la courbe au point de l’extremum.

**Correction**

a)

b) Étude du signe de la dérivée :

On commence par résoudre l’équation .

Soit :

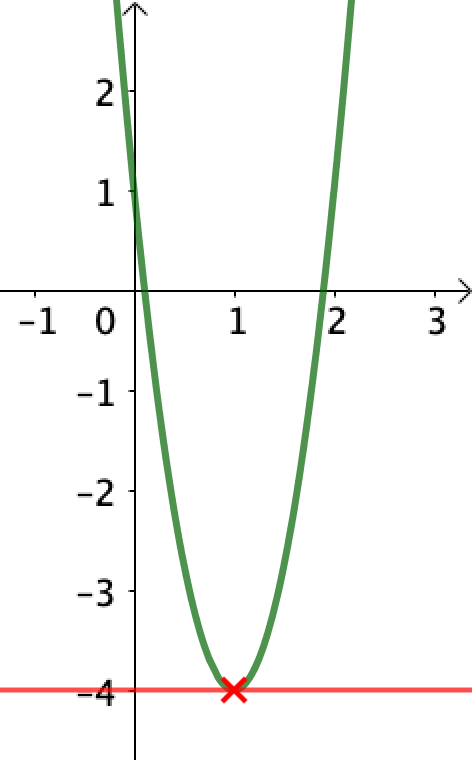
.

La fonction est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 10 est positif.

est croissante. Elle est donc d’abord négative (avant ) puis positive (après ).

c) On dresse alors le tableau de variations :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | |
|  |  |  |
|  |  | |

d) On lit dans le tableau de variations que la fonction admet un minimum égal à en

.

e) Au point de l’extremum de la fonction, la dérivée s’annule.

On a .

La tangente est donc de pente nulle et parallèle à l’axe des abscisses.

Comme , l’équation de la tangente est .

Méthode : Tracer une courbe à l’aide du tableau de variations

 **Vidéo** [**https://youtu.be/gPhyoY-d\_VU**](https://youtu.be/gPhyoY-d_VU)

On donne le tableau de variations de la fonction définie sur l’intervalle

Tracer dans un repère une représentation graphique de la fonction .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | | |
|  |  |  |  |
|  |  | | |

**Correction**

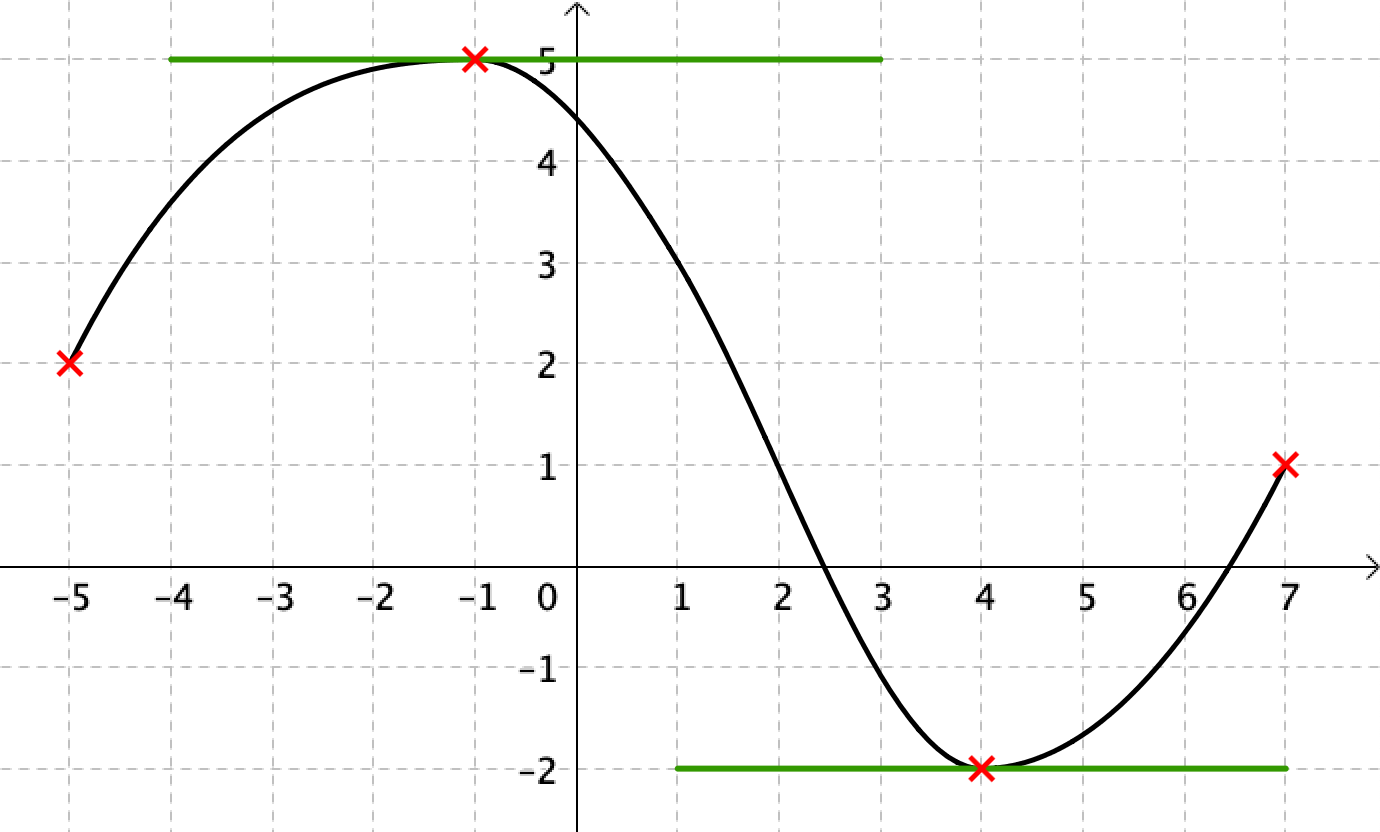
On commence par placer les points de la courbe de coordonnées , , et .

La dérivée s’annule en , la courbe possède donc une tangente horizontale d’équation en .

De même en 4, la courbe possède une tangente horizontale d’équation .

On trace ces deux tangentes au voisinage de pour l’une et de 4 pour l’autre.

On trace la courbe passant par les quatre points en s’appuyant sur les deux tangentes.



**Partie 3 : Applications**

1) Étude du signe d’une fonction

Méthode : Étudier le signe d’une fonction à l’aide de ses variations

 **Vidéo** [**https://youtu.be/nLoOEQ9mLW0**](https://youtu.be/nLoOEQ9mLW0)

Soit la fonction définie sur par .

a) Démontrer que la fonction est strictement croissante.

b) Vérifier que 1 est une racine de .

c) Dresser le tableau de variations de et en déduire le signe de en fonction de .

**Correction**

a)

Comme un carré est toujours positif,

On en déduit que la fonction est strictement croissante.

b)

Donc 1 est une racine de .

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1 |
|  |  |
|  | O |

c)

D’après le tableau de variations :

* est négative sur ,
* est positive sur .

2) Étudier la position de deux courbes

Méthode : Étudier la position relative de deux courbes

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ON14GJOYogw**](https://youtu.be/ON14GJOYogw)

Soit et deux fonctions définies sur par : et .

Étudier la position relative des courbes représentatives et .

**Correction**

On va étudier le signe de la différence :

On pose : .

On a :

Donc .

On en déduit que la fonction est strictement croissante sur .

On dresse le tableau de variations :

|  |  |
| --- | --- |
|  | 2 |
|  |  |
|  | 0 |

D’après le tableau de variations, on a : .

Soit : et donc .

On en déduit quela courbe est au-dessus de la courbe sur l’intervalle .

3) Résoudre un problème d’optimisation

Méthode : Résoudre un problème d’optimisation

 **Vidéo** [**https://youtu.be/V0gLF8iWARs**](https://youtu.be/V0gLF8iWARs)

Une entreprise fabrique des composants pour ordinateur. Pour une quantité , exprimée en milliers de composants, le coût total en milliers d'euros est :

avec .

La recette est alors égale à : .

Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût total.

Déterminer le bénéfice maximal et le nombre de composants correspondants à produire.

**Correction**

● On calcule l’expression de la fonction donnant le bénéfice :

* ﻿
* )

● On calcule la dérivée  :

● On résout l’équation  :

La fonction est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur est négatif.

est décroissante, elle est donc d’abord positive (avant ) puis négative

(après ).

● Tableau de variations :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | |
|  |  |  |
|  |  | |

● On lit dans le tableau que la fonction atteint son maximum en 15 et ce maximum est égal à 25. Le bénéfice maximal est donc de pour composants produits.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)